GÖTEBORGS UNIVERSITET
INST FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

Elevers lärande av positionssystemet

En studie av undervisning i årskurs 3-4

Helle Kjaer Jerndal

Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	Speciallärarprogrammet, SLP600
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	Vt/2015
Handledare:	Angelika Kullberg
Examinator:	Birgitta Kullberg
Rapport nr:	VT15 IPS29 SLP600

Abstract

Examensarbete: 15 hp
Program och/eller kurs: Speciallärarprogrammet, SLP600
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: Vt/2015
Handledare: Angelika Kullberg
Examinator: Birgitta Kullberg
Rapport nr: VT15 IPS29 SLP600
Nyckelord: Matematik, positionssystemet, specialundervisning, variationsteori, learning study, kritiska aspekter

---

Bakgrund och Syfte: I ett pressmeddelande våren 2014 meddelade Skolverket om svenska elevers låga resultat i matematik. Det finns flera anledningar till elevernas låga resultat. Förståelsen för positionssystemets uppbyggnad är en grundläggande kunskap som eleverna behöver utveckla. Syftet med studien är att försöka identifiera kritiska delar i undervisning om positionssystemets uppbyggnad för att kunna uppnå en djupare förståelse hos eleverna. Cady, Hopkins and Price (2014) menar att tre aspekter har avgörande betydelse för förståelse av positionssystemets uppbyggnad; *bassiffror*, *position* och *gruppering* (grupper om tio enheter). Fuson och Briars (1990) uttrycker, att det är nödvändigt att barnen får lära sig begreppen kring vårt talsystem och hur det är uppbyggt för att de med förståelse ska kunna utföra beräkningar.

Teori: Den teoretiska ramen för studien är Variationsteorin. Lo och Marton (2012) skriver att för att lära något nytt behöver man urskilja aspekter av det som skall läras som man inte tidigare urskilt. I studien identifieras kritiska aspekter för elevers lärande. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv finns möjligheter att finna kritiska aspekter kring positionssystemets delar. Dessa aspekter kan man systematiskt variera för att eleverna skall ha möjlighet att urskilja dem.

Metod: I ett försök till en Learning Study som här bygger på tre lektionscykler, söktes de kritiska aspekter som skulle kunna vara avgörande för elevens förståelse. Under lektionscyklerna har lärarna försökt skapa variationer kring de funna kritiska aspekterna. Lo (2012) beskriver hur exempelvis en siffra måste förstås i relation till sitt talsystem. Siffran 10 har olika betydelse i ett decimal- eller binärt talsystem osv. Data för analys som använts är för- och eftertest, lektionsinnehåll och intervjuer.

Resultat: De kritiska aspekter som funnits är:

1. *Platsvärde.* Eleven behöver begrepp som talsorter samt förståelse för att siffran får ett värde beroende på vilken plats den har i talet sett från höger till vänster.
2. *Enhet/antal (grupperingar i tiotal).* Här behövs en möjlighet att kunna se exempelvis tiotalet som både grupp (tio stycken) och enhet (ett tiotal) simultant.
3. *Nollans betydelse*. Eleverna behöver förståelse för nollan som värdehöjare i ett tal dvs. hur nollan kan ersätta avsaknaden av tiotal i talet 109. En svårighet uppstår ofta vid övergången när eleven ska lägga till exempelvis 1. Eleven skriver då 200.

De svårigheter som upptäckts, när det gäller elever i behov av stöd är grundläggande förståelse för bassiffrorna samt förståelse för platsvärde och tiotalet som grupp och enhet. Den

grundläggande kunskapen för förståelse utifrån Cady Hopkins och Price (2014) är att vårt talsystem består av tio siffror (0-9) som alla står för ett antal. Enligt Gelmans och Gallistels (1978) *Principen om godtycklig ordning* hör inte siffrans beteckning ihop med det räknade föremålet. Däremot kan siffrorna kombineras för att få större tal. Därefter är det av stor vikt att kunna hantera bastalen (1-10). Förmågan att upptäcka del-helhetsförhållanden utvecklas enligt Clements and Samara (2007) genom att sammanställa och dela upp tal. Förståelsen för del och helhet lägger grund för barnets aritmetiska utveckling.

Förord

I mitt sökande efter konkreta metoder för att underlätta matematikförståelsen för elever i svårigheter har jag genom Learning Study och Variationsteorin upptäckt verktyg som kan vara till stor hjälp i min roll som speciallärare i matematik. Jag vill tacka de pedagoger och elever som deltagit och gjort studien möjlig att genomföra.

Jag vill också tacka min man Patrick för visad förståelse alla kvällar och helger då studierna tagit all tid, samt engagemang i det fortskridande arbetet genom att agera bollplank för tankar, frågor och idéer.

Sist men inte minst vill jag tacka min handledare Angelika Kullberg för stöd och lotsning genom arbetet med studien.

Göteborg. Mars 2015

Innehållsförteckning

Inledning

Bakgrund

Matematikämnet har blivit ett hett ämne i Sverige sedan PISA resultaten, som släpptes i december 2013 visar en negativ trend (Skolverket. 2014). Vad elevernas låga resultat beror på är inte ~~helt~~ klarlagt, men ämnet i sig anses svårt och det finns många orsaker till varför elever har svårigheter med matematiken. I artikeln från Skolverket menar man att; *Uthållighet och motivation är viktigt för att kunna lösa problem. Det kan handla om vilket stöd som ges i undervisningen men också om elevers attityder. Det samlade resultatet från PISA är allvarligt. Vi behöver mer kunskap om orsaker men skolan måste också ges allt stöd för att stärka elevernas breda kunskaper och förmågor.* (PRESSMEDDELANDE 2014-04-01)

I pressmeddelandet från Skolverket menar man att:

> Uthållighet och motivation är viktigt för att kunna lösa problem. Det kan handla om vilket stöd som ges i undervisningen men också om elevers attityder. Det samlade resultatet från PISA är allvarligt. Vi behöver mer kunskap om orsaker men skolan måste också ges allt stöd för att stärka elevernas breda kunskaper och förmågor.

En aspekt som kan vara en orsak till det sämre resultatet är att många elever inte har förståelse för grundläggande begrepp såsom antalsuppfattning, positionssystemets funktion osv., vilket hindrar dem från att gå vidare i sin utveckling av matematiska färdigheter. I den egna praktiken har jag under våren 2014 arbetat med att screena elevers taluppfattning i ett antal klasser från förskola till årskurs 6. Jag använde mig av McIntosh´s test som finns i boken ”Grundläggande taluppfattning”. Vid en granskning av testet i helhet upptäcktes att elever som inte klarat subtraktion och addition med tiotal och uppåt också visade att det fanns svårigheter i att förstå hur vårt positionssystem är uppbyggt. Då det finns olika uppgifter i testet kring positionssystemet, kunde man också se att en del elever löste vissa uppgifter medan andra uppgifter syntes svåra att förstå. Intressant var också att testet som gjordes i år 3 visade på svårigheter med positionssystemet, men det nationella provet som gjorts tidigare på våren visade ett motsatt resultat. Skillnaderna låg i att det nationella provet hade uppgifter av karaktären” fylla i” övningar, medan McIntosh’s test frågar efter platsvärde, dvs. begreppsförståelse samt textuppgifter. Förståelse för positionssystemet innebär att man behöver kunskaper om flera olika aspekter, det vill säga dess delar såsom bassiffror, platsvärde och hur man simultant kan förstå tiotalet som både ett antal och en enhet. Det verkar som om det finns ett samband mellan en djupare förståelse av positionssystemet för att kunna hantera större tal inom addition och subtraktion. Med dessa tankar i bakgrunden undersöks i föreliggande studie hur man skulle kunna utveckla undervisningen för att närma sig en djupare holistisk förståelse i hanterandet av positionssystemet.

Syfte

Syftet med studien är att försöka identifiera kritiska delar av det matematiska innehållet i undervisningen som kan ge elever i behov av stöd möjlighet att förstå begrepp kring positionssystemets uppbyggnad som är avgörande för att kunna uppnå en djupare förståelse.

Frågeställningar

1. Vilka svårigheter kring positionssystemets uppbyggnad kan man urskilja som kritiska aspekter/delar bland elever i behov av stöd?

2. Vilka variationer, likheter eller skillnader, i svårigheter kring positionssystemet kan finnas som kritiska aspekter i förhållande till övriga elevers förståelser?

Tidigare forskning

I detta kapitel beskrivs vad som sägs inom forskningen idag om elevers taluppfattning och eventuellt samband mellan aritmetiska färdigheter. Fortsättningsvis beskrivs vilka svårigheterna är som eleverna kan stöta på och vilka förutsättningarna som påverkar matematikinlärningen är.

Positionssystemet

Cady et. al (2014) beskriver positionssystemets uppbyggnad, vilka delar det består av och hur de är relaterade till varandra. Vårt decimalsystem består av tio symboler som alla står för ett antal, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Dessa symboler kan sedan återanvändas för att representera tal av oändliga storlekar. Positionen för siffrorna ger information om dess värde och skrivs från höger till vänster samtidigt som även grupperingens storlek ger oss information för att avgöra vilken storhet som representeras. Cady et.al. menar, att användandet av en basmängd som en grupperingskonstant gör att grupperingarna själva utgör de räkningsbara enheterna. Enheter räknas; 1,2,3, därefter grupper; 10,20,30, och grupper av grupper; 100, 200, 300, och så vidare. Grundregeln blir då att forma en grupp så fort antalet tio har uppnåtts. Utifrån denna bakgrund kan man formulera tre huvudbeståndsdelar som utgör positionssystemets uppbyggnad, nämligen *bassiffror*, *position* och *gruppering* (grupper om tio enheter). För att uppnå en förståelse behövs då kunskap om de tio symbolernas funktion, platsvärde samt gruppering som antal och enhet. Denna kunskap lägger grunden till att kunna hantera räkning med stora tal.

Man kan fråga sig vilka förkunskaper som då krävs för att kunna utveckla kunskaper att hantera positionssystemet. Förståelse för vårt tiobassystem är en del av den grundläggande taluppfattning, som elever behöver för att kunna gå vidare och hantera operationer med tvåsiffriga och högre tal. Chan, Au och Tang (2014) nämner en rad förutsättningar som påverkar den matematiska inlärningen och är till stor del internationellt vedertagna. Det gäller då talradens omfång fram- och baklänges, hur långt man kan räkna både fram- och baklänges. Talrepresentation handlar om att kunna skriva de arabiska siffrornas symboler, samt skriva och uttala dem på sitt språk (i det här fallet kinesiska). Därefter följer enkel räkning såsom talföljd, räkning av objekt, förståelse för positionssystemet genom representationer av platsvärdet och gruppering i tiotal samt aritmetik.

Utveckling av grundläggande matematiska förmågor

Forskning har enligt Gelman och Gallisten (1978) visat att barn tycks ha en inneboende förmåga att räkna föremål. Denna förmåga är grunden till att kunna förstå och utveckla vidare matematisk förmåga. Gelman och Gallistel har studerat och funnit att barn utvecklar förmågor att räkna redan vid ungefär 2,5 år. Detta varierar dock mellan olika barn och forskning har visat att även nyfödda barn kan uppfatta antal. Utifrån sin forskning har Gelman och Gallistel skapat en modell som består av fem principer. Dessa principer följer en viss ordning.

Den första kallas *ett- till-ett-principen* där barnet räknar varje föremål konkret eller mentalt genom att föra över föremål från icke räknade till räknade föremål. Denna princip följs parallellt av *principen för den stabila ordningen* där beteckningar används att räkna en rad föremål som överensstämmer med en speciell upprepningsbar ordning. Beteckningarna kan vara både talradens benämningar för siffrorna eller egna beteckningar. Dessa båda processer ska koordineras. Därefter följer den *kardinala principen* där den sist uppräknade beteckningen i en serie föremål avgör antalet i en mängd. När barnet nått *abstraktionsprincipen* kan de föregående principerna appliceras på vilken konkret eller abstrakt ordning eller samling som helst. *Principen om godtycklig ordning* innebär, att ordningen för det uppräknade inte har någon betydelse. Barnet har då också fått förståelse för att ett räknat föremål är en sak och inte en siffra och att verbala beteckningar inte hör ihop med det räknade objektet, samt att det kardinala talet kvarstår oavsett hur man räknar.

Dessa förmågor är alltså nödvändiga för att barnet ska tillgodogöra sig vidare kunskaper i matematik. Gelman and Gallistel skriver, att ”The preschooler does have a concept of number – a concept that contains many of the seeds from which modern arithmetic has grown. The seeds of the child´s numerical ability grow in different ways as a consequence of diverse developmental process”. (p. 244).

Även om barn i allmänhet tidigt utvecklar taluppfattning, ~~så~~ varierar det åldersmässigt. Neuman (2013) skriver att i slutet av treårsåldern kan barn förstå räkneordens innebörd för att räkna efter hur många som finns, men för vissa barn kan det ta ytterligare fem till sex år innan de förstår så pass att de kan tillgodogöra sig undervisningen i skolan. Ross´(1986) studie, av barns utveckling av begrepp kring platsvärde i årskurs två till fem, visar på att många saknar kunskap om att hantera siffror, talbegrepp och del-helhets förhållandet. Detta hindrar barnet från förståelse. En av anledningarna till detta kan bero på hur långt barnet kommit i den kognitiva utvecklingen.

Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter och Fennema (1997)**,** skapade en modell som utgår från fem begreppsmässiga strukturer, vilka tycks följa ett antal utvecklingssteg hos barn när det gäller att räkna ihop de olika talsorterna (ental, tiotal, hundratal osv.) som separerade grupper. I början räknar barnet utifrån talraden 1, 2, 3, men kan senare i olika steg separera ental, tiotal osv. Dessa strukturer är ett mått på hur långt barnet kommit i sin förståelse av positionssystemet. Modellen kallas UDSSI där *Unitary Multi Digit Conception* är den första strukturen som barnet lär sig. Här är ental och tiotal inte separerade i grupper utan räknas utifrån 1,2,3, osv.

I Decade -and-ones conception, börjar barnet separera ental och tiotal. De inser att 50 består av femtio stycken och 3 står för antalet tre stycken. När barnet lärt sig att räkna tiotal och se det skrivna talet kan det se tiotalen för sig och entalen för sig, vilket kan ge att de sammanfogar helheten och skriver 503.

Utifrån *Sequence-tens-and-ones conception* måste barnet kunna räkna i tiotal men också lära sig att se tiotalen i grupper och att kunna förstå att det är det sist uppräknade talet som bestämmer antalet, vilket följer Gelman och Gallistels (1978) kardinala princip. Ho och Sheng (1997) menar, att europeiska barn behöver hjälp att fokusera på grupperna av tio som tiotal beroende på språket, exempelvis att 12 då det finns språkliga hinder för att förstå det arabiska siffersystemet på grund av hur man representerar talen språkligt. Ett exempel är att kinesiska barn har lättare att förstå talet 12 då det sägs som tio-två, till skillnad från engelskan som namnger talet som twelve. Detta gäller också för svenskans ord för tolv. Moeller, Pixner, Zuber, Kaufmann och Nuerk (2011) menar, att förståelsen för positionssystemets struktur blir ännu svårare att förstå då talorden inte stämmer överens med positionerna när man skriver ett tal med siffersymboler. I exempelvis talet fjorton, säger man på svenska talet fyra före tio medan man skriver 14 och i tyskan sätter man entalet framför tiotalet, det vill säga, tre och fyrtio men skriver 43 i talen efter tjugo.

När barnet använder *Separate conception* kan det räkna ental och tiotal och samtidigt förstå att tiotalet är en grupp innehållande tio stycken.

*Integrated conception i*ndikerar barnets slutliga förståelse där det snabbt kan skifta mellan entals- och tiotalsbegreppet.

Concatenated singel-digit conception indikerar att även om barnet har kommit till integrated conception, kan det använda sig av Unitary Multi Digit Conception då en beräkning ska göras vertikalt, till skillnad från en horisontell beräkning.

Fuson et.al. (1997) framhåller att konceptet ovan inte är generellt och att det finns skillnader beroende på vilket språk man har. Flera av dessa begreppsstrukturer kan användas av ett barn i olika situationer och alla barn går inte igenom alla stadier. Nya begrepp slår inte ut de gamla utan läggs till de redan givna. Slutligen finns också en påverkan från undervisning och på vilket sätt barnet upplever begreppen individuellt.

Chan et. al. (2014), har i en studie undersökt engelska och kinesiska barns olika strategier av en ökande medvetenhet om positionssystemets platsvärde. Studien var uppdelad i tre delar. Den första gick ut på att utvärdera modellen UDSSI som beskrivits ovan.

Eftersom förståelse för platsvärdet har visat sig kunna förutsäga senare matematiska prestationer designade Chan et.al. ett test, för att kunna förutsäga senare förståelse. Detta test, skilde sig från de traditionella, vilka enligt Chan et.al. enbart behandlar platsvärdesrepresentationer och gruppering av tiotal. Ett antal olika vedertagna testuppgifter användes, vilka anses ha med utvecklingen av taluppfattning att göra samt också har en uppgift som ska kunna avslöja de olika stegen i strategiskt räknande. Resultatet från Chan´s et.al´s studie visade, liksom modellen UDSSI, att eleverna skiftade strategi från enhetliga flersiffriga tal till separata tiotal och ental i takt med utvecklingen. Inga skillnader kunde upptäckas trots språkliga skillnader mellan engelska och kinesiska barn. Chan et.al menar, att resultatet gör att utvecklingen av strategierna skulle kunna betraktas som universella. I steg två ställs två frågor. Den första är: Är det möjligt att använda resultaten från elevernas strategiska tänkande för att uppskatta deras förståelse för platsvärdet? Den andra är: Går det i så fall att rationalisera testet så att det behövs färre delar? Resultatet avslöjar att räknestrategierna öppnar för behövliga komponenter för förståelse av positionssystemet jämfört med kontrollvariablerna. Poängen på korrekt beräkning, visade sig ~~som~~ vara ett säkert kort för att bedöma förståelse för positionssystemet till skillnad från tester baserade på enbart gruppering av tiotal och representationer av platsvärde. Tredje delen testar elever i årskurs 2 enligt hypotesen att lågpresterande elever redan kommit efter i sin förståelse av positionssystemet. Författarna önskade också utvärdera hur det strategiska räknetestet skulle kunna identifiera lågpresterande elever i slutet av årskurs 2. Liksom i den andra delen visade sig strategisk räkning som den starkaste komponenten för att utröna elevers prestationer arton månader senare. De lågpresterande eleverna låg på samma nivå som de högpresterande eleverna låg arton månader tidigare, med andra ord ett och ett halvt år efter.

Elevsvårigheter

Följande avsnitt handlar om att det inom området matematiksvårigheter kan finnas orsaker, vilka nedan beskrivs och som medför att barn inte förmår utveckla sin matematiska kunnighet och matematiska förståelse.

Platsvärde och gruppering

Matematiksvårigheter kan ha orsaker såsom rädsla, dyskalkyli/dyslexi, låg arbetsminneskapacitet, missförstånd eller otillräckliga grundläggande kunskaper om taluppfatting. För att finna likheter eller skillnader mellan hög- och lågpresterande elever behövs grunden för rätt intervention av elevens matematiska färdigheter/svårigheter utforskas för att undvika en felaktig diagnos. Koellner, Colsman och Risley (2011) menar, att som speciallärare bör man beakta alla möjligheter till att undersöka om svårigheterna beror på missförstånd eller har andra hinder för att förstå ett visst moment inom matematiken innan man ställer en diagnos. De nämnda forskarna uttrycker, att specialläraren bör använda sig av högkvalitativa instruktioner och interventioner som ett alternativ till avvikelsemodellen. Den förstnämnda processen att använda kallas *respons to intervention* (RTI) och "indicates that special educators should look first to a student`s responsiveness to high-quality instruction before looking for an organic disability" (s. 49).

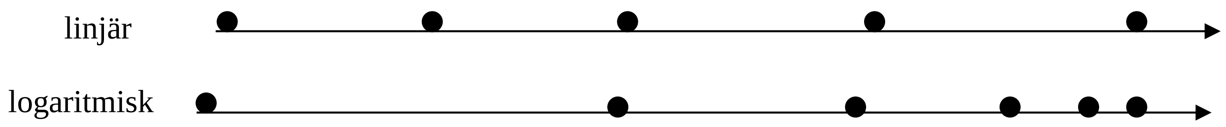
Koellner et.al. beskriver en Case Study där Danny (påhittat namn) i fjärde klass ligger långt under godkänd nivå i matematik och framför allt i att lösa uppgifter, sannolikhet och taluppfattning. Det har gått så långt att han inte längre arbetar med klassen utan får hjälp av en speciallärare. Men trots detta blir det inga större framgångar. Dannys lärare söker efter andra interventioner och får hjälp av Koellner et.al. vilka startar sin utredning med att intervjua Danny med särskilda frågor från ett professionellt utvecklings- och bedömningsprogram från US Math Recovery Council. Detta består av frågor utifrån fem utvärderingskomponenter kring talutveckling, däribland platsvärde, gruppering och uppdelning av tal. En uppgift för Danny bestod i två blå och fyra röda marker, som visas hastigt och sedan täcks över följt av frågan: ”Hur många”? Danny svarar att det blir tjugofyra. Fler liknande uppgifter ges och Danny svarar hela tiden utifrån platsvärdet. Dannys respons indikerar att han övergeneraliserat sin kunskap om platsvärde, vilket hindrar honom från att göra en gruppering av markerna. Vad han tycks sakna är en förståelse för kvantiteten som siffrorna symboliserar. Men med möjligheten att själv få konstruera och kombinera, skulle Danny kunna erhålla en bild av hur tiotal skapas. Svårigheten som Koellner et.al. (2011) uttrycker, ligger i att simultant kunna tänka på 10 som en enhet, sammansatt av 10 enskilda föremål samt att detta är grunden för det svenska tio-bassystemet.

Genetisk och/eller förvärvad kompetens för att förstå och uppfatta tal

En allmän och utifrån min kunskap utvecklade uppfattning från den forskning som bedrivs, ser det ut som om människan innehar förmågor att förstå och uppfatta tal och att dessa förmågor utvecklas med åren beroende på barnets utveckling. Berch (2005) menar, att det finns forskare som anser att taluppfattning är en del av vårt genetiska arv, medan andra forskare betraktar kunskapen som en förvärvad kompetens, vilken utvecklas med erfarenhet. Berch menar också, ur ett neurovetenskapligt perspektiv, att det skulle finnas ett kognitivt system som genom både utveckling och utbildning skulle sammanfogas med andra kognitiva system. Berch hänvisar till undersökningar, vilka gjorts med vuxna som fått jämföra tvåsiffriga tal där man funnit en så kallad ”distance effect”, nämligen ett förhållande att ju större avstånd det finns mellan de två talen, desto kortare tid behövs för att avgöra vilket tal som är störst. Exempelvis, reagerade personerna snabbare för att avgöra storleksordningen mellan 57 och 42 än när de jämfört 61 och 59. Det har också påvisats att oförenliga tal som 47 och 62 (entalet är större i det lägsta talet) identifierats långsammare än förenliga tal som 42 och 57 (båda siffrorna är lägre i det lägsta talet). Denna så kallade entals- tiotalsjämförelse av tvåsiffriga tal tyder på, att processen med tvåsiffriga tal försiggår både separat och parallellt. Genom att därefter undersöka tiden för respons av liknande uppgifter i årskurs 2 till 5 påvisades det, att en oberoende process av ental och tiotal startar runt årskurs 2. Vidare visar resultaten att denna process utvecklas från en vänster till höger process som sedan blir mer parallell. Berch uttrycker att om barn med matematiksvårigheter har en brist i en sådan utveckling, krävs det stora ansträngningar av arbetsminne och uppmärksamhet för att beräkna flersiffriga tal.

Mentala tallinjen

Ett antal forskare inom olika discipliner har studerat människors ”mentala tallinje” och funnit att en sådan linje existerar. Men man är inte helt överens om hur denna linje utvecklas. Dehaene (2003) hävdar att det finns fysiologiska bevis för att människor och även djur i viss mån kan uppskatta antal utefter en linje. Dessa interna tallinjer kan anta både linjära och logaritmiska utseenden, vilket framgår av studier kring nervcellers möjlighet att uppskatta antal. Utifrån studier på apor har man enligt Dehaene kunnat bevisa att uppfattandet av antal är en medfödd förmåga. Siegler och Booth (2004) menar, att det sker en utveckling från förskoleåldern till omkring årskurs 2 där den mentala uppskattningen av tal sker enligt en logaritmisk skala på tallinjen, som sedan förändras till att bli linjär. “Logarithmic; …percieved distances between adjacent numbers on the mental number line decrease as their magnitudes increase” (Moeller, Pixner, Kaufmann och Nuerk, 2009). Den logaritmiska skalan innebär, att ju högre tal på tallinjen desto kortare blir avståndet mellan intilliggande tal. Efterhand utvecklas detta seende till att följa jämna avstånd mellan talen.



Elever i årskurs 1 pendlade enligt Moeller et.al. mellan dessa båda. Den utveckling av talrepresentationer mellan 0-100 som sker mellan förskoleålder och årskurs två har också en parallell utveckling för tal mellan 0-1000 som sker mellan årskurs 2 och årskurs 6. Siegler and Booth (2004) framhåller, att data från samtida forskning ger belägg för att det sker en utveckling utifrån olika åldrar och tidsintervall, vilket ger anledning att misstänka att Piaget (1896-1980), Vygotsky (1896-1934) hade rätt i sina hypoteser om barnets utvecklingszoner. I en studie med jämförelser mellan olika tal ”distance effect” som nämnts ovan, fann Moeller et.al. (2009) att ental och tiotal kunde ha olika fack för representation av dessa tal. I ytterligare studier har Moeller et.al. (2011) kunnat påvisa möjligheten till separata linjer för ental och tiotal istället för en logaritmisk linje. En sådan process menar Moeller et.al. kan medföra svårigheter för barn i att integrera ental och tiotal till en sammanhängande enhet. Det krävs en förståelse och framgångsrik tillämpning av det arabiska talsystemet för en korrekt uppskattning av storleken av ett tal på en linjär tallinje. Det är exempelvis avgörande att förstå att intervallet mellan 0-60 måste vara tio gånger så stort som mellan 0-6. Siegler och Booth (2004) uttrycker också att det är nödvändigt att ha en generell kunskap om decimalsystemet, speciellt när det handlar om representationer med rader av okända tal.

I detta fall kan tallinjen enligt Siegler och Booth vara ett användbart verktyg för förståelse. De skriver också att tallinjen har flera fördelar i klassrummet både praktiskt och begreppsmässigt då de är lätta att framställa, kan användas till förståelse för omfattningen av räckvidden av vilka tal som helst samt tydliggöra alla tal som meningsfulla enheter vilkas storhet är definierade av decimalsystemet. Verchaffel, Greer och De Corte (2007) skriver att ”Being able to place whole numbers on an empty line with a fixed start and end point…Positioning enables students to gain a general idea of the size of numbers to be placed” (s.568).

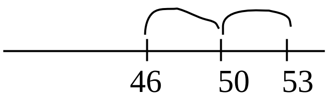
Siegler och Booth (2004) beskriver brädspel som en informell väg till en ökad säkerhet för linjära representationer. Ju högre tal som visas på tärningen desto längre tid tar det att flytta sin pjäs till sin destination och ju fler steg som barnet måste flytta sin pjäs ett steg i taget desto fler räkneord tränas vid pjäsens förflyttning.

Förståelse för del- och helhetsförhållandet

Den första och kanske mest betydelsefulla delen för att utveckla förståelse för positionssystemet är hanterandet av bassiffrorna. Genom att sammanställa och dela upp tal utvecklas förmågan att upptäcka del-helhetsförhållanden som enligt Clements and Samara (2007) är en av de nödvändigaste färdigheterna inom aritmetiken. Ett speciellt närmande till addition och subtraktion kallas begreppsmässig subitizering (conceptual subitizing), vilket innebär att eleven ”ser” talet och hur det delas upp i delar.
Neuman (2013) diskuterar i en artikel observationer som redovisades i hennes avhandling ”The origin of arithmetic skills. A phenomenographic approach” (1987). Observationerna gjordes med elever som deltog i specialundervisning i grundskolan, gymnasieelever som ansåg sig ha stora matematiksvårigheter samt nybörjare som ännu inte hade undervisats i matematik. Vad Neuman fann var att ”det som främst tycks förorsaka grava eller specifika matematiksvårigheter är att eleverna saknar talföreställningar samt förståelse för sambandet mellan de fyra räknesätten” (s. 3). Neuman uttrycker också att det finns två delar som bör vara målet för de första skolårens aritmetikundervisning, i första hand att hjälpa eleverna förstå räkningens och räkneordens innebörd och därefter att ”låta barn upptäcka hur de tio bastalen i vårt decimalsystem kan delas upp i lika eller olika delar, när man subtraherar” (s.9). Utifrån ett helhetstänkande menar Neuman att subtraktion kan betraktas som det mest ursprungliga av de fyra räknesätten då man utifrån en helhet försöker att urskilja dess delar. Detta gäller också division. Addition och multiplikation utgår däremot från delar som ska utgöra en helhet. Hon anser också att det sätt vi använder för att lära eleverna aritmetikens grunder idag gör det svårare än vad det behöver vara. Subtraktion betraktas av många som ett av de svåraste momenten och ställer till svårigheter för en del elever. Dels förknippar eleverna subtraktion med bakåträkning och addition med framåträkning, dels förknippas vissa problem med addition av typen, du har 2 saker och behöver 9. Hur många fattas? (2+_=9). Eleverna inser inte att de kan gå framåt eller bakåt vid ett sådant problem utan tvingas räkna upp alla ord för delen, samtidigt som de måste räkna hur många de uppräknade orden är. Ett sådant räknande utgör en dubbelräkning som är ytterst krävande för arbetsminnet.

Neuman intervjuade även högstadie- och gymnasieelever som själva ansåg att de hade grava matematiksvårigheter. Det visade sig att dessa hamnat i en återvändsgränd eftersom de aldrig upptäckt sambandet mellan addition och subtraktion och saknade också förmåga att räkna i huvudet. Neuman menar att färdigheter i huvudräkning förutsätter goda föreställningar om de tio *bastalen* 0-9 som utgör grunden för vårt siffersystem. Istället för tabellträning med addition och subtraktion med bastalen som hindrar elevernas matematiska utveckling, behöver eleverna kunna ”se” talen och dess uppdelning. Genom att tillgodogöra sig dess tjugofem uppdelningar kan man sedan direkt se hur addition och subtraktion hänger ihop. Exempel på en uppdelning kan vara 6|2|8 som kan kombineras enligt följande; 6+2=8, 2+6=8, 8-6=2, 8-2=6, 6+_=8 osv.

När eleverna har lärt sig de 25 kombinationerna utvecklade Neuman (1987) en idé för hur eleverna själv skulle bli varse hur talen delades upp vid tiotalsövergångar. Med Cuisenairestavar och en platta som var delad i tio längder efter en tiostav, fick eleverna lösa uppgifter som 9+7. Vid start med en sju-stav och därefter lägga en stav ovanför den andra så att stavarna fick plats på plattan såg eleven hur nio delades upp i 3|6|9. Fortsättningsvis fick sedan eleverna endast se stavarna framför sig. Plattan byttes sedan ut mot ett band där tiotalen var utsatta och femtalen med prickar. Eleven kunde då gå direkt till exempelvis 53 och lösa uppgiften 53-7 genom att ”se” 3|4|7, alltså



Detta sätt att räkna kallas på engelska ”jump method” och är utifrån Verchaffel, Greer och De Corte (2007) en räknestrategi som syns vara den mest effektiva att använda vid räkning med högre tal.

Samband mellan elevers förståelse för positionssystemet och aritmetiska färdigheter

Man kan fråga sig om det finns något samband mellan förståelse för positionssystemet och förmågan att utföra addition och subtraktion med högre tal. I Ho och Shengs (1997) studie undersöktes systematiskt sambandet mellan förståelse för platsvärde och undermåliga prestationer inom aritmetik. Man valde en grupp elever som uppvisade svårigheter med att utföra addition och subtraktion och delade dem i två grupper där den ena fick vara kontrollgrupp och den andra erhöll speciell träning i att förstå positionssystemet. En tredje kontrollgrupp var skicklig inom addition och subtraktion. Interventionen skulle pågå under fem veckor med en timmas träning i veckan samt med läxor. Man startade med att fräscha upp och stärka elevernas kunskaper i muntlig räkning samt att räkna föremål. Därefter skulle eleverna bunta ihop stickor om tio och sätta tio sådana buntar i ett glas. De skulle sedan lägga till och dra ifrån stickor. Genom aktiviteterna tränades gruppering, omgruppering och utbyte av stickor. Slutligen parades buntar och stickor ihop med sifferkort. Under tiden använde man sig också av andra aktiviteter och spel för att utveckla talens platsvärde. En sammanställning av resultaten visade att gruppen med svagpresterande elevers resultat höjdes markant i jämförelse med kontrollgrupperna. Dessa elever hade till och med kommit ikapp den högpresterande gruppen inom addition. Ho och Sheng signalerar att effektiviteten av ett sådant träningsprogram höjer elevernas förståelse för positionssystemet och ökar därmed också förståelsen för addition. Subtraktion däremot gav inte samma resultat, vilket Ho och Sheng tolkade kunna bero på att man inte gick in för att träna växling bakåt.

En longitudinell studie har gjorts i Österrike av Moeller, et.al. (2011), i vilken man följt elever från årskurs 1 till årskurs 3 för att undersöka om tidig förståelse för positionssystemet har någon avgörande betydelse för elevers aritmetiska utveckling under senare år. Moeller, et.al. menar, att utifrån tidigare studier kan man anta att en bättre förståelse för taluppfattning, speciellt strukturen för det arabiska platsvärdet i talsystemet har en påverkan på taluppfattning hos elever i årskurs tre.

Moeller et.al. skriver som följer:

> To test this prediction, the current study investigated whether third graders´ addition performance as a measure of calculation ability was effected by their basic numeral knowledge, and particular their place-value understanding as indexed by transposing and magnitude comparison in first grade. (s.1840)

I studien har man också tagit hänsyn till andra bakgrundsfaktorer såsom arbetsminnets kapacitet och intelligens. Det visade sig också oväntat enligt Moeller et.al., att ett renodlat samband mellan VM (working memory) och senare färdigheter inom addition inte var signifikant. Intelligens räknades inte heller som ett tillförlitligt medel för att förutsäga resultatet av analysen. Kortfattat är slutsatsen enligt Moeller et.al att förståelsen för positionssystemets uppbyggnad är en kompetens för en framgångsrik utveckling av senare aritmetisk kunskap.

Interventioner för ökad förståelse av positionssystemet

För att kunna utföra beräkningar med olika talsorter, behöver eleven förstå hur positionssystemet är uppbyggt. Fuson och Briars (1990) menar, att det är nödvändigt att lära ut dessa begrepp till barn istället för att endast skapa procedurer utan förståelse för vårt talsystem. För att förstå systemet av engelska ord (gäller också svenska) och skrivna stora tal, behöver barnen lära sig att konstruera värdeorden i tiobaspositionerna. De behöver begreppsliga strukturer för orden och talen och de behöver kunna relatera dessa begreppsliga strukturer till varandra och till ord och tal. Att koppla ihop tioblock, sifferkort och skrivna tal, skapar enligt Fuson och Briar, en starkare förståelse vid ett konstant användande än ett icke konstant, tills eleven känner sig trygg att enbart skriva talen. Genom att addera och subtrahera med blocken till skrivna tal blir kopplingarna starkare, menar nämnda forskare. Cawley et.al. (2007) hävdar att elever med svårigheter i matematik inte kan bli presenterade en samling regler som används vid en algoritm och därefter träna dessa regler på en mängd olika beräkningar. Cawley et.al. menar, att eleverna först behöver utveckla en uppfattning om vad som händer då man utför en addition med överföring eller subtraktion med växling. Cawley et.al. skriver att ”Students who lack ”number sense” are not aware that 40+3+9 and 50+2 represent a common value in that the 1s and the 10s have been renamed not revalued” (s. 33). De menar vidare att om målet är att hjälpa elever som saknar taluppfattning, måste prioritering av platsvärde göras i undervisningen.

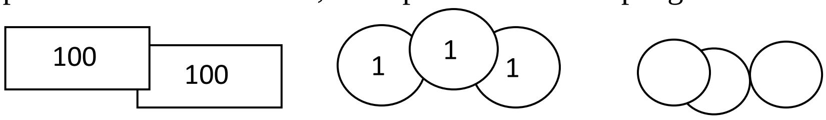
Cawley et.al. visar hur de skapat en variation av representationer som de uppfattar skulle kunna ge eleverna en möjlighet till förståelse. Interaktive Unit består av två huvuddelar som benämns input och output.

Input är vad eleverna får till sig (eg. hur läraren väljer att mediera en representation av ett tal) och representationerna består av:
*Manipulat*e handlar om hantering av konkret material vilket kan ändras och förflyttas.
Display betyder användning av bilder eller annat som är fixerade och inte kan flyttas om.

State utgör ett verbalt uttryckt
Write refererar till skrivna bokstäver, siffror eller andra former av matematiska symboler.

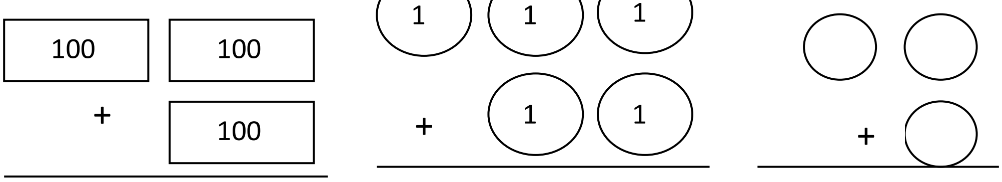
Output består också av fyra delar (eg. eleven varierar själv mellan olika representationer).
Manipulate innebär hantering av konkret material vilket kan ändras och förflyttas.
Identify betyder representationer av uppgifter.
State utgör ett verbalt uttryckt
Write refererar till skrivna bokstäver, siffror eller andra former av matematiska symboler.

Exempel på hur inputs och outputs kan användas i undervisningen för att tydliggöra och vidga förståelsen för positionssystemet, kan vara att läraren väljer att visa en bild (*display*) för en representation av talet 233, exempelvis en bild av pengar.



Eleven ska i beskriven uppgift med hjälp av stickor (*manipulate*) skapa en representation av talet 233 enligt bilden som läraren visat. Därefter ska eleven välja mellan två eller flera sätt att representera talet *(identify*). Dessa sätt kan vara att uttrycka talet verbalt enligt 2=200, 3=30 och 3= 3 och skriftligt i kortform, 233 eller utvidgad form, 200+30+3. På samma sätt kan man med fördel illustrera en algoritm.

Konkret material



Utvidgad form

200	30	2
+100	+20	+1

Kortform 232
+121

Med hjälp av dessa outputs och inputs skapas en variation som gör att eleven utsätts för olika sätt där talet eller beräkningen överförs mellan flera olika representationer. Cawley et.al. (2007) anser att många elever tappar bort sig på vägen om de endast får en representation av en bild som sedan ska överföras till talets korta form (ex. 353) vilket är ett vanligt sätt att undervisa. De behöver också den utvidgade formen 300+50+3. Författarna betonar också hanterandet av konkret material som output och drar en parallell till konstruktörers byggande av ett hangarfartyg som föregås av arkitekters och ingenjörers skrifter och ritningar.

Sammanfattning

Sammanfattning av forskares beskrivningar ovan är gjord utifrån författarens egen tolkning av innehållet varför det inte finns några direkta referenser. Styckets innehåll är skapat för läsarens sammanfattande förståelse av ovanstående teoretiska avsnitts innehåll samt som förförståelse för läsande av innehållet i fortsättningen.

Matematikforskningen utgörs av en rad olika inriktningar som betraktar lärandet på olika sätt. Några talar om medfödd förmåga och utvecklingssteg, en del ser lärandet som inre kognitiva strukturer och somliga menar att lärandet sker i mötet med andra människor och omvärlden. Det finns dock i en stor del av matematikforskningen vedertagna faktorer som påverkar den matematiska inlärningen. En faktor är minnets omfång och betyder att för att förstå vårt arabiska decimalsystem behövs förkunskaper för att behärska den senare aritmetiken i form av talradens omfång fram- och baklänges, talrepresentation, enkel räkning såsom talföljd och räkning av objekt. Vidare behövs förståelse för positionssystemet genom representationer av platsvärde och gruppering i tiotal. En annan för det matematiska lärandet betydelsefull del kan vara bearbetning av den mentala tallinjen för att främja uppskattning av tal, vilket ökar förståelsen för det arabiska talsystemet. Orsaker till matematiksvårigheter kan bero på olika faktorer, exempelvis en bred tidsram för utveckling av kognitiva förmågor, otillräckliga kunskaper om grundläggande principer, språkliga hinder, missförstånd. Några typer av forskningsstudier som bedrivs idag utgår ifrån att ge svar på *varför* svårigheter uppstår, *hur* man kan kartlägga elevers utvecklingsnivå för att sätta in åtgärder, och *vad* som kan användas i form av konkreta interventioner i en viss situation. Ett exempel på det sistnämnda är användningen av de tio bastalens uppdelning och förståelse för sambandet mellan de olika räknesätten och hur man tänker vid tiotalsövergångar. Enligt Neuman (2013) ger en sådan kunskap också avlastning för arbetsminnet. Studier som utförts av bl.a. Cawley et.al. (2007) och Ho och Cheng (1997) visar ~~på~~ *ett* samband mellan kunskap om positionssystemet och att kunna beräkna addition och subtraktion med större tal. De tre huvudbeståndsdelar som utgör positionssystemets uppbyggnad är *bassiffror, position* och *gruppering* (grupper om tio enheter).

Teoretiskt ramverk

I detta avsnitt beskrivs innebörderna i variationsteorin, vilken utgör föreliggande studies teorianvändning.

Variationsteorin

Variationsteorin har utvecklats under 30 år av forskning och en central tanke i teorin är skriver Marton (2005) ”att vårt agerande i världen är en funktion av hur vi uppfattar världen” (s. 107). Teorin har sprungit fram ur idén att vi människor erfar och urskiljer skillnader. Vi lägger märke till t.ex. individer utifrån hur de skiljer sig från andra individer. Det är också därför som människor upplever andra människor, föremål och händelser på olika sätt. Lo och Marton (2012) skriver, att vi måste lära att urskilja varje särdrag, därför att en enskild företeelse inte kan existera utan en medvetenhet om variationen mellan särdragen.

Enligt Lo (2012) uttrycks det som följer:

> …one cannot obtain the meaning of the number from the number itself, but only from its relationship with the numerical system to which it belongs for example, the meaning of the number 4 is derived from its value in the decimal system of numbers. It is greater than 3 and less than 5. The number 10 has different meanings in the decimal and binary systems of numbers. (s. 44)

Lärande, menar Lo och Marton (2012), är alltid riktat mot något fenomen. Lärandet för varje person förändras kvalitativt i hur man betraktar detta något, vilket är en följd av Lo och Martons mening att människor uppfattar fenomen i sin omvärld på kvalitativt skilda sätt beroende på sina förförståelser, tidigare kunskaper och erfarenheter. Detta beskrivna något kallas inom variationsteorin *lärandeobjektet*, vilket enligt Lo (2012) består av två aspekter, den specifika aspekten som gäller det innehåll som ska läras samt den generella aspekten som står för förmågan eller färdigheten som skall utvecklas.

Lo och Marton (2012) betonar att undervisningen ska starta med elevernas möte med den odelade helheten, precis som objekt och händelser uppenbarar sig i det dagliga livet. Det är utvecklande för lärandet, menar Lo och Marton att i inledningsskedet fokusera på skillnader istället för likheter tills eleven har kunnat urskilja de kritiska aspekterna av vad de ska lära sig. Därefter kan en generalisering komma till stånd för att separera vad som är kritiskt och inte kritiskt. Lo (2012) beskriver hur lärandeobjektet kan kännas igen (urskiljas) genom att hålla en aspekt invariant (konstant) medan den fokuserade aspekten varieras.

När en lärare ska identifiera kritiska drag hos ett lärandeobjekt, ska läraren inte ta några aspekter för givna då just dessa delar kan utgöra svårigheter för eleven. För att undvika ett sådant förbiseende finns det olika metoder för att ta reda på kritiska aspekter. Det kan röra sig om en granskning av läromedel, diskussioner mellan lärare om tidigare erfarenheter, klassrumsobservationer och noggrant utformade för- och eftertest, skriver Lo. En annan viktig del som enligt Lo kan upplysa läraren om elevers förförståelse, är elevintervjuer. Eftersom eleverna har egna föreställningar om det som ska läras behöver man ta reda på om dessa föreställningar är felaktiga eller ofullständiga för att de inte ska bli till hinder för att se objektet på ett sätt som utgår från den specifika elevens omvärld. Intervju och eftertest kan ge möjligheter för läraren att se vad eleverna faktiskt lärt sig då detta lärandeinnehåll varierar från person till person på grund av elevens tidigare föreställningar. I beskriven studie används begrepp som kritiska aspekter och dess värden/dimensioner av variation, invariant, samt lärandets objekt.

Metod

I detta kapitel beskrivs användningen av Learning Study som ett vetenskapligt verktyg för beskriven studies empiri.

Learning Study

I föreliggande studie har en kvalitativ ansats valts då avsikten var att söka efter konkreta möjligheter till lärande. Då studien är liten och handlar om en praktiknära forskning kan resultaten inte överföras på andra klasser direkt. I detta avseende hade en kvantitativ metod inte kunnat vara aktuell då den baseras på att generalisera utifrån ett större antal undersökta objekt.

Learning Study är en vetenskaplig metod som enligt Marton (2007) är baserad på teoretiska ramar såsom fenomenografin och Variationsteorin. ”A Learning Study is a systematic attempt to achieve an educational objective and learn from the attempt” (s. 34).

Med ”Learning Study” som verktyg kan man finna vägar att utveckla undervisningen så att fler elever än annars får möjlighet att lära. Modellen kan också bli ett verktyg för speciallärare för att hjälpa svagpresterande elever då en ”Learning Study” enligt Lo och Marton (2012) visat sig öka elevers lärande och minska klyftan mellan hög- och lågpresterande elevers lärande.

En första ”Learning Study” genomfördes enligt Lo och Marton (1999) i Hong Kong och kom senare att utvecklades till en modell och metod som utvecklats i några andra länder såsom Sverige, UK och Brunei.

Utförandet av en Learning Study kan genomföras av enbart lärare från samma skola eller olika skolor och/eller tillsammans med forskare och ämnesdidaktiska experter. Learning Study har enligt Pang och Marton (2003) visats öka lärares pedagogiska kapacitet och professionella utveckling. Genom dokumentation av olika lektionsförsök kan metoden bli ett sätt att dela med sig av professionell kunskap.

Pang och Marton poängterar att Learning Study är lärandestudier i tre avseenden. Först är det avsikten att de deltagande eleverna ska lära sig om det lärandeobjekt som är i fokus och förstå det bättre än vad de annars skulle ha gjort. För det andra är det meningen att läraren ska lära sig hantera lärandeobjektet, inte enbart det specifika objektet utan lärandeobjektet i allmänhet. En Learning Study förväntas vara en bro mellan teori och praktik. Det tredje avseendet syftar till att forskare som är närvarande under en Learning Study, skall lära hur teorin fungerar i praktiken, eftersom varje Learning Study baseras på en teori.

När man som lärare önskar utmana eleverna, finns det frågor som Runesson (2005) anser kan vara relevanta ur ett variationsteoretiskt perspektiv att ställa både före och efter en lektion.
Vad är avsett att lära?
Vad är möjligt att lära?
Vad har eleverna lärt?
Vilka aspekter av lärandeobjektet var i fokus?
Var dessa aspekter möjliga att urskilja?

Vidare skriver Pang och Marton (2003) att det som ska vara i fokus under en Learning Study är lärandeobjektet och inte hur man undervisar, alltså inte formen eller organisationen, exempelvis om arbetet sker i par eller i grupp. Pang och Marton beskriver själva Learning-Study-metoden i fem steg. Dessa steg skrivs i det nedanstående i kursiv stil. Först ges i det följande en kortfattad beskrivning som följs av en mer detaljerad beskrivning över undersökningsförfarandet. Cykeln genomförs tre gånger.

1. *Det mest betydelsefulla är att välja ett lärandeobjekt.* Lärandeobjektet i föreliggande studie behandlar positionssystemets uppbyggnad, med fokus på två- och flersiffriga tal.

2. *Undersökning av elevernas förkunskaper genom ett förtest med avseende på olika sätt att uppfatta lärandeobjektet.* Elevernas förkunskaper testas i ett förtest som analyseras.

3. *Lektionerna planeras och implementeras hos berörda lärare och/eller forskare tillsammans för att finna kritiska aspekter med fokus på lärandeobjektet. Därefter implementeras den genomförda planeringen i lärarnas klasser och lektionen filmas för senare analys tillsammans med för och eftertest.* Lektionen planeras, genomförs och filmas. Här skiljer sig beskriven studie från andra då författaren står för den största delen av analysen. De tre klasslärarna har i olika grad deltagit i analysen av för- och eftertest. Filmerna i den föreliggande studien har analyserats enbart av författaren.

4. *Lektionen utvärderas genom ett eftertest för att se hur eleverna tagit till sig lärandeobjektet. Den inspelade lektionen filmas för att studera hur lärandeobjektet hanteras. En jämförande analys görs för att finna skillnader mellan studenternas förmåga att förstå lärandeobjektet i förhållande till hur lärandeobjektet hanterades under lektionen.* Eftertest har genomförts och analyserats tillsammans med videoinspelningarna.

5. *Resultaten rapporteras, dokumenteras och sprids för att lärare, forskare och eventuellt allmänheten ska kunna ta del av vad som lärts under studien.*

Syftet med studien har varit att försöka identifiera och utveckla kritiska delar av det matematiska innehållet i undervisningen, vilket skulle kunna ge elever i behov av stöd möjlighet att förstå avgörande begrepp kring positionssystemets uppbyggnad för att uppnå en djupare förståelse. Då lärandeobjektet fokuserar på förståelse för hur två- och flersiffriga tal är uppbyggda inom positionssystemet, det relevant att utforska hur långt eleven kommit i sin förståelse för helheten av positionssystemet, såsom bassiffror, position och gruppering (grupper om tio enheter).

Förberedelser (beskrivning av undersökningsförfarande)

I detta avsnitt beskrivs hur studien har förberetts samt hur undersökningen har utformats. Under rubriken förtest och eftertest har även resultaten av de tre klassernas förtest lagts till i anslutning till varje uppgiftsbeskrivning.

Val av lärandeobjekt

Det ämnesinnehåll som ska undersökas är elevernas förståelse för hur vårt talsystem är uppbyggt och vilka kritiska aspekter som behöver synliggöras för att eleverna ska få en djupare förståelse. Förberedelserna sker med hjälp av tidigare forskning på området när det gäller svårigheter, nödvändiga förkunskaper samt samband mellan positionssystemet och vidare aritmetisk utveckling. Diskussion med berörda lärare följer inför utformandet av ett förtest. Testet innehåller frågor och uppgifter som berör nödvändig förförståelse och i huvudsak av hur eleverna förstår att positionssystemets delar består av både enhet och antal… räkna ental och tiotal och samtidigt förstå att tiotalet är en grupp innehållande tio stycken (Fuson et.al.,1997).

De tre klasserna som deltar i studien benämns Klass A, med 18 elever, Klass B, med 12 elever och Klass C, med 20 elever i den ordning som lektionscyklerna ges. Klass A och B är från början valda utifrån ett test av elevernas grundläggande taluppfattning. Resultaten visade svårigheter med förståelsen för positionssystemet vilket avgjorde valet till undersökningen. Klass C valdes då klassen är ny på skolan och läraren ville få en inblick i hur eleverna uppfattar positionssystemet. Klasslärarnas intresse var också en avgörande del i valet.

Förtest och eftertest

Testet genomfördes i tre klasser, två årskurs 4 och en årskurs 3. Samma test användes i varje klass vid för- och eftertest men har ändrats två gånger då författaren och de involverade pedagogerna hittat fler kritiska aspekter för att belysa hur elever kan förstå uppgifterna. Ytterligare ett tillägg har gjorts i det tredje testet i avsikt att utröna hur eleverna löser tiotalsövergångar. Testen analyserades med en kvantifiering för att kunna jämföra resultaten både före och efter för att se om det fanns några skillnader i lärandet. Testen har sedan klassvis granskats och analyserats utifrån ett kvalitativt perspektiv och därefter jämförts med varandra.

Testet har utformats med hjälp av uppgifter ur McIntoshs´ (2009) test av taluppfattning uppgifter från ett gammalt nationellt prov samt en tabell som utformats utifrån ett spel av Broadbent (2004), där man ska föra in talens värde som enheter (bil. 1). I testet är det fyra uppgifter som direkt handlar om positionssystemet. De har valts utifrån olika aspekter från forskning kring vad som är av betydelse att förstå, men som kan innebära svårigheter för vissa elever. Svårigheten som Koellner, Colsman and Risley (2011) uttrycker det, ligger i att simultant tänka på 10 som en enhet som är sammansatt av 10 enskilda föremål och att detta är grunden för vårt tio-bassystem. Testet innehåller uppgifter som visar positionssystemet utifrån olika aspekter. Uppgifterna speglar förståelsen av talsorter som enhet och antal, platsvärde och tiotalsövergångar. Resultaten av uppgifterna redovisas i tabellen nedan.

Övriga uppgifter är mer av förkunskapskaraktär och tas inte upp i resultattabellen.

Uppgifterna som följer beskrivs till innehåll tillsammans med elevernas resultat på förtestet.

Uppgift 4 visar om eleverna känner till den utvidgade formen och kan översätta till kortform av talet 600+70+4. Frågan är vilket talet kan vara. På eftertest 2, klass B, ändras uppgiften eftersom samtliga elever tycks ha-lätt för denna uppgift både i klass A och B. Frågan blir hur eleverna tänker om man vänder på uppgiften, och ska skriva ett visst tal i utvidgad form.

Klass A. Det utgjorde ingen svårighet för eleverna att skriva ett tal i kortform utifrån en utvidgad form (uppg. 4). 17 av 18 klarade uppgiften. Slutsatsen blir att det förmodligen handlar om ett tillfälligt fel då denna elev i övrigt hade en viss förståelse av de övriga uppgifterna.
Klass B. I förtestet var det endast en elev B1 som inte kunde lösa uppgift 4. 600+70+4. Uppgift 4 utgör ingen svårighet i någon av klasserna A eller B varför uppgiften ändras i eftertestet. (4b)*

Uppgift 4 var ursprungligen att tala om vilket tal som utgjordes av 600+70+4 vilket syns som om de allra flesta elever i de två klasserna har förstått. Uppgiften ändrades då för att se om de kunde lösa frågan baklänges samt utifrån det skrivna använda siffror. Alla löste a-uppgiften. 4) Skriv talet etthundrasjuttiofyra
a) med siffror
b) uppdelat i hundratal, tiotal och ental.
Klass B. Endast en elev av tolv hade svårighet med att skriva talet i kortform medan fem elever fick svårt att vända på begreppet och skriva i utvidgad form.
Klass C. i uppgift 4b var det tre av tjugo elever som inte skrev talet i utvidgad form. Det gällde här de elever som räknats som lågpresterande.*

Uppgift 6 illustrerar hur eleverna tolkar begreppet *värde* när det gäller platsvärdet i ett tvåsiffrigt tal. Vilket värde har 1 och 7 i talet 17? Visar också på förståelse för antal (gruppering av tiotal) då det finns en bild i anslutning till uppgiften med sjutton stjärnor.
Klass A. Sammanlagt fyra elever av arton klarade inte uppgiften.
Klass B. Sex av tolv elever kunde inte hitta platsvärdet. De två lågpresterande eleverna visste värdet på entalet men inte tiotalet.

Klass C. I denna uppgift var det de tre elever som räknats som lågpresterande som inte uttryckte platsvärdet. Övriga i klassen hade detta klart för sig.

Uppgift 7. En bil har kört 5099 km. Hur långt har den kört om den körs 1 km till? Här är det tiotalsövergångarna med förståelse för enhet/antal som testas samt en förklaring på hur eleven tänkt (bil. 3).

Klass A. Fem elever av arton visar fel svar. Två elever svarade 6099 vilket kan påvisa svårighet att avgöra var i talet övergången ska ske. Kanske blev det förvillande på grund av enheten km.
Klass B. Sammanlagt fyra av tolv elever klarade inte uppgift 7, tiotalsövergång på förtest. Elev B2 svarar att 109+1=218. Här kan man tänka sig ett missförstånd vid tolkning av texten i uppgiften. I övriga klassen motiverade eleven sitt svar; 109+1=1109 eftersom 1 km=1000m.
Klass C visar sammanlagt fem felsvar av tjugo. Här fanns två elever som fått svaret 6000/6099

I uppgift 8 ska eleverna placera in tre/fyra tal under rätt rubrik utifrån ental, tiotal, hundratal och tusental i tabell. Här behövs en annan syn och säkerhet på platsvärde samt förståelsen för gruppering i tiotal.

Klass A. uppgiften utgjorde svårigheter för sammanlagt sex av arton elever. En elev hade inte svarat och resterande fem skrev hela talet i en ruta men lyckades placera det högsta värdet i rätt ruta exempelvis 303 under hundratal. Ingen av eleverna totalt hade använt en tabell på detta sätt tidigare så det skulle kunna förklara de felaktiga insättningarna, men största antalet elever som visat förståelse av de flesta uppgifterna i testet hade dock placerat talen korrekt. Detta kan var en indikation på om förståelsen för platsvärde finns så hamnade siffrorna i talen på rätt plats.
Klass B. Här satte tio av tolv elever in talsorterna på felaktigt sätt. Felaktigheten bestod av att eleven utgick från den högsta siffran och placerade hela talet under exempelvis hundratalsrutan då talet var 333.
Klass C. Eleverna utgick som klass B från den högsta siffran och placerade hela talet under exempelvis hundratalsrutan då talet var 333 eller hade inte svarat alls. Detta gällde sammanlagt nio av tjugo elever.

I testet för klass C ändrades ytterligare en uppgift för att öka insikten i elevers förståelse av språkets begreppsliga strukturer för värdeorden samt tiotalsövergångar med förståelse för enhet/antal. Skriv talet som är fyra ental större än 439, samt två tiotal mindre än 709.
Klass C. I uppgift 2a har två av de tre lågpresterande eleverna inte kunnat lösa uppgiften medan övriga arton elever klarade att lösa den. I uppgift 2b visade sammanlagt 6 av tjugo elever svårigheter med tiotalövergång nedåt.

Lektionsplanering

Berörda lärare och författaren analyserade vad vi trodde skulle behöva belysas och planerade lektionen utifrån tolkning av kritiska aspekter som vi funnit i förtestet. Tyvärr blev dessa diskussioner korta då vi inte kunnat utverka tid för dessa. Analyserna blev då i huvudsak utförda ur författarens tolkning. Metoden följde alltså inte fullt ut riktlinjerna för hur en ”Learning Study” ska utföras. Den blev mer som ett verktyg för en blivande speciallärare att lära sig utforska elevers svårigheter med positionssystemet. Jag utgick då ifrån Pang och Marton. (2003) att läraren (specialläraren) ska lära sig hantera lärandeobjektet, inte enbart det specifika objektet utan lärandeobjektet i allmänhet. Learning Study förväntas också vara en bro mellan teori och praktik. Med hjälp av tidigare forskning kring positionssystemet, både som rena teorier och olika metoder såsom UDSSI (se s. 6 ovan), vilka omsätts i praktiken kan olika möjligheter synliggöras för att hjälpa elever i behov av stöd.

Videofilmning av lektion

Filmning genomfördes i de tre klasserna men hela lektionen kom inte med då vi inte hade tillgång till filmkamera med tillräcklig plats för en hel lektion. Vissa delar av lektionerna har tagits upp på ljud. Avsikten med filmningen var att synliggöra hantering av innehållet, lärarens och elevernas samspel och försöka utforska hur eleverna uppfattade innehållet och eventuella hinder för detsamma. Filmningen var också ett medel för att få med lärarens och elevernas dialoger så långt det har varit möjligt.

Analys (redogörelse av analysmetod)

Analysen är gjord utifrån ett försök till variationsteoretiskt perspektiv där begrepp som ingår i teorin utgick ifrån de kritiska aspekter vi funnit med det avsedda lärandet, att hantera positionssystemet. Dessa kritiska aspekter innefattar nollans betydelse, kunna se enhet och antal simultant, övergångar mellan ental, tiotal och hundratal, ange en siffras värde beroende på placering i talet är viktiga delar i decimalsystemets uppbyggnad för en djupare förståelse av helheten. Efter analys av lektionen med frågeställningar utifrån vilka aspekter av lärandeobjektet som var i fokus och huruvida dessa aspekter var möjliga att urskilja, planerades en ny lektion där det som skulle läras förändrades för att skapa en ännu bättre lärandesituation. Detta upplägg genomfördes i ytterligare två klasser. Slutligen gjordes en analys av samtliga lektioner för att försöka finna vad som var av avgörande betydelse för elevernas lärande av lärandeobjektet.

Data insamling utgjordes av för- och eftertest, (bil. 1) videoinspelade lektioner som återgavs i stort sett i sin helhet under excerpt (utdrag ur transkription av videoinspelning) då inspelningsmöjligheterna inte var de bästa och texterna inte så långa, samt intervjuer med elever (bil.3). Resultaten redovisas i tabell, procent utifrån hela klassen. Endast elever som deltagit i alla tre delarna, förtest, lektion och eftertest räknades i studien, dvs. klass A, 18 elever, Klass B, 12 elever och klass C, 20 elever.
Elever som hade fel på flera av uppgifterna i förtestet, framför allt uppgift 6 och 8, betraktades här som lågpresterande då de inte förstod platsvärdet i ett tvåsiffrigt tal. I klass A gällde det här två elever. I klass B två elever och i klass C tre elever. Aktuella elever benämns som A1, A2, B1, B2, C1, C2, C3.

De transkriptioner som gjorts av lektionerna speglar innehållets behandling. Ord eller delar av meningar som uteslutits markeras med tre punkter. Kursiverade ord eller delar av meningar har analyserats i anslutning till excerpten.

Intervjuer har genomförts direkt efter eftertestet, med 3 elever i klass B där två av dem visade svårigheter att förstå och en tredje som hade en klar bild av enhet och antal. Dessa intervjuer har också tagits upp på ljud. Intervjuerna finns som bilaga (bil.2) och återges endast i utdrag i texten. Intervjun bestod av ett antal grundfrågor som i de olika fallen utökats eller modifierats något beroende på samtalets gång.

En intervju gjordes med en av de lågpresterande eleverna i klass A, sex veckor efter det att eftertestet gjorts för att ta reda på hur eleven uppfattat lärandeobjektet i ett tidsperspektiv.

Validitet och reliabilitet

Validitet är utifrån Bryman (2012) det kriterium vid forskning som handlar om tillförlitligheten av de slutsatser som görs i en forskningsundersökning, det vill säga att forskaren undersöker det hen gett sig ut för att undersöka. Det skiljs mellan flera olika aspekter av validitet där inre och yttre validitet är två av dem. Inre validitet (internal validity) syftar till orsakssammanhang, det vill säga att variabeln x (oberoende variabeln) är orsaken till y (beroende variabeln). Detta ger frågan hur säker man kan vara att den oberoende variabeln åtminstone delvis orsakar det man funnit hos den beroende variabeln. Yttre validitet (external validity) handlar om generaliserbarhet, det vill säga om resultatet från en viss undersökning kan vara relevant utanför just denna specifika undersökning.

Reliabilitet är enligt Bryman, en fråga om resultaten från en studie blir desamma ifall undersökningen genomförs på nytt. Ett test ska vara så noggrant beskrivet och utfört så att det kan upprepas av andra forskare och få liknande resultat. Om resultaten skulle skilja sig stort är reliabiliteten mycket låg eller obefintlig. Validiteten med mätinstrument är beroende av reliabiliteten på så sätt att om mätningen av konceptet varierar kan inte någon validitet erhållas.

Båda begreppen används inom den kvantitativa forskningen när något ska jämföras utifrån en större kvantitet. När det gäller den kvalitativa forskningen är det svårare att använda mätinstrument då studien oftast rör sig kring kvalitativt skilda tankar och handlingar hos människor. Bryman beskriver hur några författare har med några smärre ändringar gjort begreppen validitet och reliabilitet mer användbara för den kvalitativa forskningen. De föreslår ett begrepp som pålitlighet (trustworthiness) som ett kriterium för hur god en kvalitativ undersökning är. Varje aspekt av pålitlighet har en parallell till den kvantitativa forskningens kriterier.

Trovärdighet (credibility, internal validity) handlar om hur väl forskarens teoretiska idéer stämmer överens med det som observerats. Vid en filmning av undervisningssekvenserna kan man lättare identifiera vissa händelser som påverkar det man vill åstadkomma.

Överförbarhet (transferability, external validity) är det man funnit tillämpbart i andra sammanhang. Då studien är liten och handlar om en praktiknära forskning kan resultaten inte överföras på andra klasser direkt.

Etik

Studien följer det grundläggande individskyddskravet enligt Vetenskapsrådet (Internet, (2015-03-04), vilket utgörs av fyra allmänna huvudkrav på forskningen. Dessa utgörs av:

Informationskravet, där forskaren ska informera om de villkor som gäller deltagandet och att detta deltagande är frivilligt och kan avbrytas om så önskas. Samtliga inblandade såsom elever och pedagoger informerades i föreliggande studie enligt gällande regler, studiens syfte, frivilligt deltagande samt hur studien kommer att användas.

Samtyckeskravet innebär att forskaren ska inhämta undersökningsdeltagarnas samtycke, men då undersökningen inte innefattar frågor av privat eller etiskt känslig natur hämtas samtycke från pedagoger och skolledning. Beskriven undersökning har skett inom ramen för ordinarie arbetsuppgifter och på vanlig arbetstid, vilket är förutsättningen.

Konfidentialitetskravet innebär att alla uppgifter kring identifierbara personer skall antecknas, lagras och avrapporteras på ett sådant sätt att enskilda människor inte kan identifieras av utomstående. Skolan har en policy där föräldrar har skrivit under på om eleverna får fotograferas eller filmas. Elever som inte får vara med på bild har placerats utanför kamerans område. För att skydda elevers identitet har filmen endast visats för de i studien inblandade pedagoger samt författaren. Genomförda tester, skolans namn eller läge har skyddats på ett sådant sätt att ingen person kan identifieras av utomstående.

Nyttjandekravet innebär att uppgifter om enskilda, insamlade för forskningsändamål, inte får användas eller utlånas för kommersiellt bruk eller andra icke-vetenskapliga syften. Detta krav har följts i föreliggande studie.

Bearbetning av data

För att få svar på studiens forskningsfrågor har data bearbetats enligt följande:
De tre lektionerna har analyserats utifrån innehåll för att få fram hur pedagogerna varierat de framkomna kritiska aspekterna. Varje lektion har analyserats för sig och därefter har en jämförelse gjorts mellan de olika lektionerna. Vidare har sedan en analys gjorts av resultaten mellan för- och eftertest för att utröna om eleverna har fått en förståelse.
Resultaten presenteras i tabellform samt med stapeldiagram för en översikt. I tabellform redogörs även vilka dimensioner av variation eller värden som blivit synliga under lektionen dvs. hur pedagogen varierat olika aspekter kring de kritiska aspekterna. Utifrån dessa data gjordes en sammanfattning av de kritiska aspekter (svårigheter) som framkommit. Slutligen gjordes en jämförelse mellan lågpresterande elever och övriga elever med hjälp av tidigare data samt intervjuer.

Resultat

I detta kapitel redovisas först lektionsinnehållet i tabell 1 och beskriver hur lärarna disponerat lektionsinnehållet utifrån de kritiska aspekter man funnit och om det finns likheter och olikheter som kan vara avgörande för hur lektionsinnehållet kunnat synliggöra de önskade delarna. De fält som har samma färg i de olika lektionerna innebär att de ska vara likvärdiga och de utan färg skiljer sig helt eller delvis ifrån varandra. Därefter redovisas i tur och ordning de tre cykler (klass A, B, C) som genomförts. Delarna består av *analys av förtest och lektionsplanering* följt av själva *lektionen.* Lärandeobjektet var det samma i alla tre lektionerna, förståelse för positionssystemets uppbyggnad. Lektionernas struktur var likartad och startade med genomgång och diskussion, följt av elevarbete på lite olika sätt.

Tabell 3 illustrerar de dimensioner av variation som blivit synliga.
En jämförelse har gjorts mellan de olika klassernas resultat på för- och eftertest . För att få syn på hur eleverna resonerar kring positionssystemet redovisas även intervjuer .

Sammanfattning av lektionsinnehåll för klasserna A, B, C

Tabell 2. Lektionsinnehåll och struktur

Klass A (lektion1)	**Klass B (lektion 2)**	**Klass C (lektion3)**
*Läraren uppmärksammar eleverna på hur nollan ges ett värde tillsammans med siffrorna 1-9		*Läraren uppmärksammar eleverna på hur nollan ges ett värde tillsammans med siffrorna 1-9.
		*Eleverna uttrycker olika tankar kring nollans funktion.
*Läraren frågar hur många siffror man kan ha i entalsraden. Eleverna svarar nio. Illustreras med glasspinnar i enhetstabell		*Gemensam diskussion lägger fokus på möjligt antal siffror i enhetstabellen.
*Läraren uppmärksammar eleverna konkret och verbalt på enhet (ental och tiotal i tabell) och antal (gruppering av pinnar)	*Läraren uppmärksammar eleverna skriftligt och verbalt på enhet (ental och tiotal i tabell) och antal (gruppering)	*Läraren uppmärksammar eleverna konkret och verbalt på enhet (ental och tiotal i tabell) och antal (gruppering av pinnar)
*Läraren uppmärksammar eleverna på hur talsorter delas upp i enheter.	*Läraren uppmärksammar eleverna på hur talsorter delas upp i enheter.	*Läraren uppmärksammar eleverna på hur talsorter delas upp i enheter.
	*Läraren uppmärksammar eleverna på platsvärde	
*eleverna uttrycker kunskap om övergång mellan ental, tiotal och hundratal.	*Eleverna uttrycker sin kunskap kring platsvärde	*Eleverna uttrycker sin kunskap kring platsvärde
		*Läraren uppmärksammar på enhet och antal skriftligt med tal i utvidgad form och tal i kortform
*Eleverna arbetar enskilt eller i grupp med abstrakta tal i talsortsövergångar	*Eleverna arbetar i grupper med konkret material samt skriftlig sortering av ental och tiotal i tabell	*Eleverna arbetar konkret och skriftligt med enhet/antal, växlingar mellan enheter framåt och bakåt
*Mindre grupp arbetar med konkret material i form av tabell med talsorterna utsatta samt glasspinnar som ental, tiotal etc…	*Lektion avslutas med en gemensam insättning av erhållna värden i tabell för enheter	*Avslutar med elever som sätter in enhet och antal skriftligt i tabell
*Läraren knyter ihop påsen med en genomgång av lektionsinnehållet med frågor till eleverna om hur de uppfattat talsorterna som enhet och antal		

Introduktionsdelen var ungefär lika lång i de tre lektionerna. De startades dock upp lite olika då klass A och klass C fick en längre startsträcka kring nollans värde och antalet möjliga siffror i talsystemet. Denna del förstärktes i klass C då det uppstod en diskussion kring nollans betydelse som gav plats för reflektion. Klass B startade från jämförelser av enhet och antal vilket också A och C följde med lite olika upplägg. Ett gemensamt upplägg för hur talsorter delas upp i enheter fanns med i alla tre lektionerna. Klass B och C diskuterade kring begreppet platsvärde som är ett begrepp, vilket ökar förståelse av positionssystemet, men inte gavs speciellt utrymme för i klass A. Endast klass C reflekterade djupare kring talet skrivet som kortform och utvidgad form, vilket gav en ytterligare dimension till enhet och antal. Elevernas arbetsdel skiljde sig mellan de tre klasserna och behandlade lite olika delar där klass C synliggjorde flera variationer av enhet och antal. Klass A arbetade med talsortsövergångar förutom i den lilla gruppen som arbetade konkret med talsorter och tiotalsövergång. Klass B hade ett annat upplägg där främst enheter kom i fokus. Alla tre klasserna avslutade med en repetition kring det område man arbetat med.

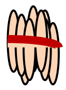
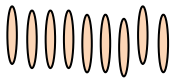
Första cykeln Klass A

Analys av förtest och planering av lektion 1

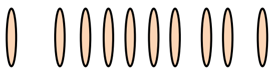
Genom att använda variationsteorins begrepp (kritiska aspekter, lärandeobjekt, dimensioner av variation/värden, kontrast) för att synliggöra innehållet i ett lärandeobjekt har lärare A och författaren använt nedanstående begrepp för att analysera och planera lektion 1.
Kritiska aspekter innebär aspekter som är nödvändiga för eleverna att urskilja för att lära sig det som avsetts.

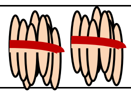
Svårigheterna i klassen varierade, de flesta förstod värdet av ental och tiotal men fick svårigheter med platsvärdet i större tal. Några elever hade inte tagit till sig platsvärde av ental och tiotal och visade osäkerhet kring tiotalsgruppering. Med utgångspunkt från svårigheterna uppfattade vi följande kritiska aspekter; kunna se *enhet och antal simultant* (att förstå att ett tiotal består av tio enheter), *övergångar mellan ental, tiotal och hundratal*, ange en siffras värde beroende på placering i talet; *platsvärdet.* Själva grupperingen av tiotal bör här betraktas som invariant för att sedan skapa kontraster kring hur tiotalet behandlas. Tiotalet som grupp kontrasterades mot platsvärdet i talet för att skillnaderna skulle bli möjliga att uppfatta. Antalet varierades från ental till tiotalsgruppering, från tiotal till hundratalsgruppering dvs. hur värdet stiger tiofalt för varje nytt steg åt höger i talet.

Exempel på tavlan;

Hundratal: 0	Tiotal: 1	Ental: 9	Utvidgad form	Kortform
			10+9	19

Talet nitton illustreras här med en bunt glasspinnar samt nio lösa pinnar. Talet skrevs i kortform; 19 och i utvidgad form; 10+9. Här fick eleverna möjlighet att urskilja samtidighet.



Hundratal: 0	Tiotal: 2	Ental: 0	Utvidgad form	Kortform
			20+0	20

En pinne lades till de nio lösa som bildade ett tiotal som buntats ihop. Vi fick ett nytt tiotal och noll ental. Övergången mellan tiotal och hundratal visades på samma sätt med 10 tiobuntar som bildar ett hundratal=100 glasspinnar.

Analys av lektion 1

Beskrivning av lektion
Klass A; större delen av klassen deltog aktivt och uppmärksamheten var god. Eleverna reagerade på antalet glasspinnar som illustrerade både enhet och antal då de inte kunde förstå att det verkligen fanns hundra glasspinnar i hundratalsbunten varvid vi delade upp bunten för att se att där var tio stycken tiobuntar. Diskussionen om nollans betydelse kunde uppfattas som något långdragen då en viss okoncentration uppstod bland flera elever. En av eleverna som skulle delta i lilla gruppen hade svårt att koncentrera sig, tittade bara upp då och då och pysslade med ett anteckningsblock där emellan.

Lärare A startade med en diskussion om nollans betydelse, därefter följde en genomgång av platsvärde och uppdelning av tal i talsorter. I en tabell på tavlan startade vi med 9 ental och illustrerade dessa med 9 glasspinnar. Därefter lade vi till 1 och illustrerade detta genom att föra samman tio glasspinnar som buntats ihop till ett tiotal och förde in den under tiotal i tabellen. Proceduren upprepades med tiotal till hundratal.

Platsvärdet med nollans betydelse

Lärare A startade en diskussion om nollans betydelse för att ge de olika talsorterna ett värde. Eleverna tycks ha klart för sig att nollan ger uttryck för antal tillsammans med andra siffror.

Excerpt 1.
L: Vad känner ni till om nollan?
E: inget värde i nollan. *Den får värde när man sätter ihop den med andra siffror.*

Övergångar mellan talsorter samt jämförelser med talsorter som antal och enhet.

Läraren visade på att man endast använder siffrorna upp till nio. Elev uttryckte antalet nio som sista möjliga siffra i entalsraden. Läraren visade konkret hur det går till och frågade vad som sedan händer. Eleverna uttryckte förståelse för hur övergången mellan ental och tiotal omformuleras, samtidigt visade läraren konkret med *en bunt om tio* glasspinnar hur den placeras under tiotal och med nollan i entalsraden visades en värdeökning från ental till tiotal. Denna procedur gjordes om igen med tiotal som övergick i hundratal (se exempel s. 19). Läraren varierade mellan enhet och antal; *tio, ett tiotal, tio tiotal, ett hundratal, hundra ental som man buntat ihop, tio ental som man buntat ihop, grupper med tiotal.* På så sätt kunde eleverna få en simultan upplevelse av antal och enhet uttryckt med konkret material och talskrivning. I slutet diskuterades antalet glasspinnar som hundra stycken i en bunt men det framgick inte att det var tio tiotalsbuntar, buntade till ett hundratal. Läraren avslutade dock med att räkna tiobuntarna i hundrabunten med hjälp av eleverna.

Excerpt 2.
Läraren ritar en tabell på tavlan och läser talen.

Tusental	Hundratal	Tiotal	Ental

L: 1, 10 100 osv. kallas för talsorter för det är ju olika sorters tal. I tabellen sätter man in *en siffra för varje talsort.* Vi ska ta hjälp av glasspinnar. Sätter upp en pinne.
L: Här är ett ental. *Hur många* pinnar får det finnas *i entalsraden?*
E: *nie*
L: *Nie, ja.* (håller upp nio pinnar till) Vad händer sen?
E: *Sen blir det ett tiotal.*
L: Vi lägger till nio till de den första pinnen och får *tio, ett tiotal.* Då hamnar den här (under tiotal). Vad händer i entalsraden då?
E: Det blir noll
L: Om vi har *nio tiotal,* buntar eller *grupper med tiotal* och lägger till en?
E: *Hundra*
L: Här finns alltså *hundra pinnar* men man säger att det är ett hundratal. Hur hänger detta ihop?
E: De e ju ett hundra bara.
L: Ja, *ett hundratal är* ju egentligen *hundra ental som man buntat ihop* och *ett tiotal är tio ental* som man buntat ihop.

Uppgift för enskilt och/eller grupparbete

Eleverna fick skriftliga uppgifter att lösa där 9009 var invariant och addenden varierade. (Övergång från konkret till abstrakt tänkande då eleverna fick föreställa sig glasspinnarna) 9009+1=, 9009+10=, 9009+100= osv.. Avsikten var att eleverna skulle få syn på vilket platsvärde som omformuleras beroende på vilken talsort som lades till talet.

När uppgiften var löst skulle de sätta in de erhållna talen i en tabell enligt följande:

Vilket är talet	Uppdelat i talsorter	tusental	hundratal	tiotal	ental
9010	9000+10	9	0	1	0

Variationen på hur talet skrevs synliggjorde olika aspekter såsom platsvärde och antal.

I den stora elevgruppen lyckades de flesta med alla uppgifter under lektionen. Det fanns dock några som tyckte det var svårt att lösa själva talet, exempelvis att veta vilken siffra i positionen som ändras beroende på vad man lägger till.
9009+10= 9019 (uppgift 7 i för- och eftertest, övergångar mellan talsorter).

Eftertestet visade ingen förbättring för de tre elever som tidigare inte kunnat lösa uppgiften.

En mindre grupp på tre elever A1, A2, och A3 som visat att de inte förstått någon av uppgifterna 6,7,8 fick arbeta enskilt med talområde 1-100 samt använda konkret material (glasspinnar). Samtalet spelades in. Eleverna fick här skriva in 9, därefter lade vi till 5 för att se om de klarade tiotalsövergången och använde 14 för att dela upp i talsorter och slutligen lade vi till 100 för att sedan placera in talen i tabellen.

Uppdelat i talsorter	100-tal	10-tal	1-tal	Skriv talet
5	0	0	5	5
9+5	0	1	4	14
100+10+4	1	1	4	114

I gruppen var det svårt att avgöra specifikt var svårigheten låg, dock hade ingen av dem någon klar bild av talets platsvärde. (Uppgift 6)

De hade inte heller svarat på uppgift 7 och 8 i första testet, vilket inte var så underligt då de inte förstått platsvärdet i en första tiotalsövergång. Det framgick också att eleverna inte hade grupperingar klart för sig. Detta gjorde att de förmodligen inte kunde se enhet och antal samtidigt.

Lärandeobjektet i klass A

Frågan är vilka aspekter av lärandeobjektet det var i fokus i klass A samt om dessa aspekter var möjliga att urskilja. Det totala resultatet för hela klassen visade inte på någon större skillnad mellan för- och eftertest förutom i uppgift 6 där sjutton utav arton elever klarade uppgiften i eftertestet. Läraren visade konkret övergången mellan ental och tiotal samt tiotal och hundratal. Talen 1 och 9 var invarianta, medan talsorterna växlade. Detta gjordes för att illustrera enhet och antal simultant vilket skulle kunna ge att denna aspekt var tydligast i fokus. Platsvärdet i tabellform utgjorde fortfarande en svårighet för fyra utav arton elever, vilket också visade sig i uppgift 7. Lektionens skriftliga övning gav inte någon bild av själva övergången om eleven inte redan hade fått grepp om platsvärdet. Genom att direkt överföra lektionens genomgång till enbart en skriftlig övning fick inte eleverna någon möjlighet att urskilja alla dimensioner av variation i form av olika representationer. Cawley et.al (2007) menar att det behövs ett flertal olika representationer för att kunna förstå platsvärdet. Det var därför inte möjligt att urskilja denna aspekt. En möjlig kritisk aspekt i sammanhanget kan vara begrepp som platsvärde och talsort. Den lilla gruppens arbete med konkret material i form av tiobuntar med glasspinnar samt träning med tiotalsövergångar gav en elev möjlighet att uppfatta värdet av 1 och 7 i talet 17 vilket också skulle kunna tyda på att simultantolkning av enhet och antal utgör en kritisk aspekt.

Andra cykeln

Analys av förtest och planering av lektion 2

De kritiska aspekter som kunnat uppfattas utifrån förtestet verkar vara desamma som för klass A, att förstå att tio är både en enhet och tio stycken samtidigt, övergångar mellan ental, tiotal och hundratal, ange en siffras värde beroende på placering i talet; platsvärdet. Ytterligare aspekter kan vara begreppsförståelsen samt värdet på nollan. Man kan fråga sig hur lärargruppen tänker för att illustrera den förstnämnda kritiska aspekten och om de matematiska begreppen förvillar, exempelvis vad gäller platsvärde, talsort osv. Klassläraren och författaren beslutade att det är antal/enhet samt platsvärdet som ska belysas under lektionen denna gång. Tiotalet som grupp planerades som kontrast mot platsvärdet i talet för att skillnaderna skulle bli möjliga att uppfatta.

Genomförande av lektion 2

Klass B; Även här deltog klassen på ett aktivt sätt i genomgången och alla var ivriga att få komma fram till tavlan och skriva in resultat i tabellen. När läraren belyste skillnaden mellan att sätta in 33 eller 3 i tabellen under tiotal (enligt uppgift 8 i testet) såg man att flertalet fick en idé om antal, aktiviteten ökade och fler exempel gavs. En elev som uppvisat stora svårigheter med förtestet såg ut att inte ta in vad som sades då blicken var fokuserad åt ett annat håll.

Talens värde, samt antal och enhet.

Läraren startade med att diskutera talens värde och jämförde med pengar, *hur mycket är den värd…, fem ental eller fem kronor*, *två tior…, tjugo.* Läraren jämförde och varierade ental och antal med ett känt begrepp då eleverna är vana att tänka utifrån pengars värde. Begreppet *värde* synliggjordes.

Platsvärdet betonades, beroende på var de står så säger vi att siffrorna är värda någonting, *vart talen står…, värda olika mycket…*

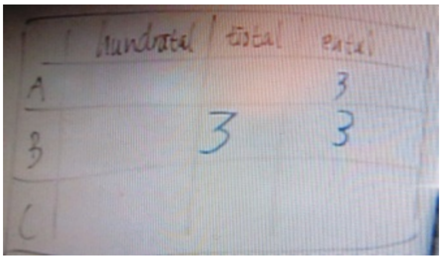
Eleverna deltog aktivt genom att benämna och skriva på tavlan vad 5 står för i talet 25 och därefter vad tvåan står för. Läraren använde hela tiden siffrans värde som enhet och antal, dvs. två tiotal, alltså tjugo, vilket gav eleverna möjlighet att urskilja grupperingar av tiotalen. Detta skedde både skriftligt med siffersymboler och muntligt.

Excerpt 1.
Läraren: Vi tittar på talet 25. Här har vi *fem ental.* Och vad har vi här? (pekar på tvåan)
E: *tiotal*
L: *Ser ni att jag skrivit en tia och en etta under*? Det ska föreställa mynten, pengarna. Nu skriver jag *samma tal* men använder *andra ord. Hur mycket är den värd?*
E: *Fem ental*
L: Och hur mycket är den värd om vi talar om pengar?
E: *Fem kronor.*
L: Precis, *fem stycken ental eller fem kronor*. Hur mycket är den värd? (pekar på tvåan)
E: som *två tior.*
L: Som två tiotal, hur mycket är den värd då?
E: *Tjugo*
L: Beroende på *var talen står* så är dom *värda olika mycket.* Om jag lägger till en siffra här (skriver 3 framför 25). Vad är trean?
E: hundratal.

Platsvärde upp till hundratal.

Läraren illustrerade med hjälp av talsortstabell på tavlan hur talen delas upp i enheter och värdet på talet beroende på placering. Elev satte in hela *talet 33 under tiotal* varvid de övriga eleverna var med och funderade på hur det stämde eller ej. *Vad är det som inte riktigt stämmer?* En annan elev flyttade en trea till entalsraden; *tänkte ental, för det kan ju inte vara två tiotal där.* Läraren visade då på vad det skulle betyda om det fanns 33 tiotal i tiotalsraden, men tog inte upp antalet möjliga tiotal (upp till nio) i kolumnen. Läraren belyste skillnaden på antal och enhet då eleverna kunde se att 33 tiotal är det samma som 330. Fler liknande inskrivningar gjordes med hundratal. Elev satte in talet 303 och läraren uttryckte hur talsorterna delas upp som enheter. *Såhär delar man upp tal, … tre ental, 0 tiotal och tre hundratal.*

Excerpt 2.
L: Minns ni den här tabellen där ni skulle sätta in ental tiotal osv. ?
Elever: Jaa
L: Nu ska ni *sätta in talet 33 i tabellen.*



(En elev går fram och skriver 33 i tiotalsrutan)
L: Stämmer det?
Elever: Nää…
L: *Vad är det som inte riktigt stämmer?*

(En annan elev går fram och ändrar)
L: hur tänkte du där?

E: Jag *tänkte ental, för det kan ju inte vara två tiotal där*
L: Aha… Som Kalle skrev så skulle det betyda att vi har *trettiotre stycken tior*. Nu har vi talet 303. Kan du sätta in det?
(Elev går fram och skriver)
L. Stämmer det?
Elever: Jaa…
L: Då har vi *tre ental, 0 tiotal och tre hundratal*. Såhär *delar man upp tal.*

Lektionen fortsatte med en praktisk övning i två lag. Bollkastning i två hinkar märkta ental och tiotal. Personligt protokoll fördes med *kryss för varje ental och tiotal* i en tabell.
Eleverna kastade och kryssade i sitt protokoll. Därefter samlades klassen för att för in sina kryss på gemensamt blädderblock samt *räknade gemensamt ihop ental och tiotal.* Det gemensamma resultatet fördes in i tabell enligt uppgift 8 i test. Här belystes enheter men för att få syn på antal hade eleverna behövt sätta streck för hela antalet och därefter räknat om till enheter.

Lärandeobjektet B

Vilka aspekter av lärandeobjektet var i fokus?
Var dessa aspekter möjliga att urskilja?
De aspekter av lärandeobjektet som var i fokus under lektionens genomgång var *platsvärde* i talet samt *enhet/antal*.

Läraren varierade begreppet enhet/antal med att jämföra antal med kronor i form av ental (fem kronor) tiotal (tio kronor) osv. En ytterligare variation framgick genom att läraren uttryckte enhet och antal verbalt och skriftligt med siffersymboler vilket synliggjorde skillnaden mellan ord och symboler. Detta öppnade upp för möjligheten att urskilja aspekten antal/enhet.
Siffrans värde beroende på placering varierades med hjälp av tabellen och insättningen av tal. Begreppet värde uttrycktes samtidigt på ett tydligt sätt för de olika talsorterna. Här framgick en dimension av variation för den kritiska aspekten platsvärde. Resultat på eftertestet visade på att flera elever kunnat urskilja aspekten. Av tolv elever var det sex som inte förstått uppgiften på förtestet (uppgift 6). På eftertestet visade tio av tolv elever förståelse för platsvärdet i talet 17. För de två lågpresterande eleverna utgjorde aspekterna möjlighet att urskilja värdet av 1 och 7 i talet 17.

En variation på hur man belyser antal och enhet genom att skriva talet i kortform och utvidgad form som en jämförelse framgick inte klart under lektionen och kunde därför inte urskiljas.

Tredje cykeln Klass C

Analys av förtest och planering av lektion 3

Med utgångspunkt från de två tidigare lektionerna så tycks svårigheten med uppgifterna sammanfalla. Kritiska aspekter som lärargruppen funnit är simultan förståelse för talsorter som *enhet och antal.* I den nytillkomna uppgiften 2a och b samt uppgift 7 som står för övergångar mellan talsorter var det fem av tjugo elever som visade att de inte förstått detta, vilket gav att *övergångar mellan talsorter* kvarstod även här. Eftersom uppgifterna 2b och 7 innefattar en nolla i talet betraktade vi nollans betydelse som ytterligare en kritisk aspekt. Uppgift 2b handlar också om språkets begreppsliga strukturer för *värdeorden*. (fyra ental större än, samt två tiotal mindre än…) Uppgift 6 som handlar om att uttrycka värdet för 1 och 7 i talet sjutton är begrepp som de tre lågpresterande eleverna inte visat förståelse för. Uppgift 2b till skillnad från 2a och 7 utgjorde en större svårighet då det handlade om att minska två tiotal från hundratalen. Här minskades istället hundratalen, från 709 till 509 av de sammanlagt sex elever av tjugo som svarat fel. Utifrån förtestet fann vi tre troliga kritiska aspekter; förståelse för talsorter som antal och enhet, övergångar mellan talsorter samt nollans betydelse. Vi behövde hitta variationer för nollans betydelse, tiotalsövergångar samt förståelse för enhet och antal.

Genomförande av lektion 3

Klass C; Uppstarten på lektionen blev fördröjd då klassläraren var tvungen att lösa en konflikt innan vi kunde starta och det dröjde fyrtio minuter innan vi kom igång. Några elever var fortfarande oroliga efter konflikten och de som fått vänta blev okoncentrerade och hade svårt att fokusera i början av lektionen vilket syns tydligt på filmen. En av de svagpresterande eleverna försökte hela tiden följa med i undervisningen medan några av de som presterat bäst på förtestet tycktes en aning oengagerade. Det gick också att urskilja att vissa elever inte lyssnade utan sysslade med annat i tankarna.

Den tredje lektionen startades med en genomgång och diskussion om antalet siffersymboler i vårt talsystem samt nollans betydelse. Vi övergick därefter till att tala om hur man med hjälp av nollan kan börja räkna om från 1 när man kommit till nio. Läraren gjorde en kort jämförelse med fembas.

Nollans betydelse och platsvärde

Genom diskussionen kring antalet siffror i vårt talsystem belystes hur siffrorna med nollans hjälp gjorde det möjligt att urskilja övergångarna mellan talsorterna. En elev räknade med 10 som en siffra varvid en annan elev kontrade med att tio består av två siffror; *10 är ingen siffra det är 0 och 1.*_När läraren frågade om vi behöver nollan gav eleverna en mängd förslag som skapade en variation: *Den är ju ingenting. ... använda den och göra tio. … den gör så att det blir tiotal, hundratal, tusental, tio kronor, noll ental.* Här poängterade läraren att nollan får ett värde först när man sätter en siffra framför. Eleverna visade känsla för platsvärde då nästan hela klassen deklarerade samtidigt att nollan står på entalens plats i 10. *Platsen för…? Entalen!*

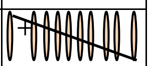
Ett ental, en glasspinne värd ett. Här uttrycktes *ett* på olika sätt för att skapa en variation av att siffran 1står för antal till skillnad från nollan som inte står för något antal och därför inte har något värde.

Excerpt 1.
L: Det liknar vårt sätt att räkna.
Hur gör vi när vi räknar?
E: Vi har *siffror*
L: *Hur många* har vi då?
E: 1,2,3,4,5,6,7,8,9…0…10
E:*10 är ingen siffra det är 0 och 1*
L: vad har nollan för betydelse då? *1 står ju för ett antal* som en penna, en elev, en lärare men *nollan, är det något att ha? Behöver vi den?*
Flera elever: Ja… nej… ja
E: *Den är ju ingenting.*
L. Är det alltid så?
E: Man kan *använda den och göra 10,* den gör så att det blir tiotal, hundratal, tusental,
L: När nollan står *ensam så betyder den ingenting.* Den har inget *värde* förrän man sätter en *siffra framför nollan.* Vad händer då? Vad betyder den?
E: Tie
L: mm… *något mer?*
Flera elever: *ett tiotal, tio kronor, noll ental*
L: Just det den står på *platsen för…*
Mindre kör: *Entalen.*

Enhet och antal samt antal siffror inom varje talsort.

Läraren konkretiserade med glasspinnar för att skilja mellan antal och enhet. Hon använde siffrorna 0,1 och 9 som invarianta, men varierade mellan talsorterna. *Ett tiotal med glasspinnar, 10 stycken glasspinnar.*

… nio ental=9, sedan börjar vi från början med 1 till vänster om nollan. Läraren ritade en enhetstabell på tavlan och frågade hur många ental man kan ha i rutan under ental. *Nio ental kan man ha,* svarade en elev varvid en diskussion uppstod huruvida man skulle räkna in nollan i kolumnens ental, vilket lade fokus på antal möjliga siffror inom varje talsort i tabellen.

Tusental	Hundratal	Tiotal	Ental
			

Tusental	Hundratal	Tiotal	Ental
			0

Läraren fortsatte med övergång mellan ental och tiotal (lägger till nio glasspinnat till den första), vilket gav möjlighet att illustrera enhet och antal då en elev uttryckte att man lägger till en pinne i tiotalsraden. *Lägga till en pinne på tiotalet och noll på entalen.* En annan elev säger *Det ska va tie. … en bunt med tio pinnar.* Enhet och antal varierades genom att skriva 1 och fästa bunten med tio glasspinnar under.

Proceduren fortsatte med tio tiotal som buntas till ett hundratal; *… hundra glasspinnar i denna bunt.* Hur många *tiobuntar finns det då?*

Nu övergick läraren till att skriva enhet och antal i tabellen. Sätt in talet 999! … *nio i första, nio i andra och nio i tredje.* Därefter placerades 900, 90, 9 ovanför respektive kolumn.

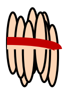
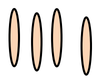
Antal	900	90	9
Talsorter	Hundratal	Tiotal	Ental
Enheter	9	9	9

Eleverna har här fått en variation av enhet/antal som uttryckts med konkreta exempel, siffersymboler samt med ord. Övergångar mellan talsorter har också varit i fokus.

Excerpt 2.
L: Hur gör vi med vårt talsystem då. Vi har nio ental=9, sedan börjar vi från början med 1 till vänster om nollan. Hur ska vi tänka då? Vi använder glasspinnar som exempel. Här är *ett tiotal med glasspinnar*, men det är också *10 stycken glasspinnar.*
– E: Jag fattar ingenting!!!!!
L: Då ska vi utveckla detta så att du ska förstå. Nu ritar jag en *tabell här… med ental, tiotal och hundratal.* Då sätter jag dit *ett ental, en glasspinne.* Den är *värd ett. Hur många ental kan man ha i rutan?*
E: *Nio ental kan man ha*
Elev räcker upp handen. – Är det inte tio med nollan?
L: Ja, är det tio stycken? Eftersom nollan står för antal 0 så kan man ha det när man visar exempelvis tiotalet. Då markerar nollan att det är noll ental, men som ensam räknar vi inte in den här
E: Jag tycker i alla fall att det blir tio.
L: Vi får återkomma till detta senare.
L: Om man *nu lägger till 9* stycken glasspinnar här, vad händer då? (Fäster nio pinnar till)
E: Då får man *lägga till en pinne på tiotalet och noll på entalen.*
L: mm… räcker det med en pinne?
E: Det ska va tio
L: Just det. Vi tar en *bunt med tio pinnar.*
-E: Jag tänkte att om man byter så blir det en där.
L: Ja, så kan man tänka när man *skriver hur många tiotal*, men egentligen är det ju *tio stycken i en bunt* och det är det jag vill visa. Tiobunten hamnar under tiotal. (fäster). Nästa steg om vi lägger till nio tiotal här. Vad händer då?
E: Det blir hundra
(Buntar ihop tio tiotal till en bunt.)
L: Nu har *jag hundra glasspinnar i denna bunt*. Hur många *tiobuntar finns det då?*
E: Tie
L: Precis. Nu tar vi *talet 999. Sätt in talsorterna under rätt kolumn.*
E: Det blir *nio i första, nio i andra och nio i tredje*
L: Ja, just det. Sedan kan man också skriva så här (skriver *900 90 9* över kolumnerna för att illustrera antal *och* enhet).

Tiobas - spelet

Tiobasspelet går ut på at träna enhet och antal samt övergångar mellan talsorter både bakåt och framåt. Eleverna fick två tärningar, ett spelprotokoll och stickor i ental samt tiotalsbuntar och en hundrabunt.

Hundratal	Tiotal	Ental
		

Eleverna skulle nu slå tärningarna och beräkna summan genom att lägga antal stickor och skriva upp summan. Nästa elev slog tärningarna och lade till stickor för den nya summan med den

föregående. Resultatet fördes in i protokollet. Detta pågick tills man nått hundra, då vände man och gick baklänges mot noll. Eleverna fick då en *överblick över växlingarna*. Här nonchalerade några elever stickorna eftersom de räknade snabbt i huvudet.
Lektionen avslutades med att två elever gick fram till tavlan och utförde varsin *insättning av ett tal med jämförande antal ovanför.*

Lärandeobjektet C

Frågan var vilka aspekter av lärandeobjektet som var i fokus, och om dessa aspekter var möjliga att urskilja.

Aspekter i fokus under lektionen var övergångarna och hur de varieras utifrån betraktandet av talsystemets uppbyggnad dvs. hur siffrorna 1-9 i det arabiska siffersystemet upprepas med tillägg av nollan vilken förskjuter siffrorna åt vänster. 9 enheter +1 = 10 = 1 tiotal = tio stycken. Genom tiobasspelet fick eleverna ytterligare en variation genom växlingar mellan talsorterna både konkret och skriftligt med siffersymboler där även enhet och antal framgick. Nollans betydelse varierades med jämförelse som ensam eller som värdegivare vid insättning av en siffra framför och olika dimensioner av 10 som ett tiotal (enhet), tio kronor (antal), noll ental (platsvärde) . Antal och enhet jämfördes med glasspinnar som antal och i bunt som enhet med inskrivning av talsorter i tabell samt utvidgad form för att illustrera antal. Aspekterna verkade möjliga att urskilja då resultaten för ett flertal av eleverna höjdes på eftertestet. Uppgiften 2b med övergångar från hundratal till tiotal var korrekta för arton av tjugo elever. Uppgift 8 gav att elva av tjugo elever klarade uppgiften i förtest men sjutton av tjugo vid eftertest. Dock kvarstod de lågpresterande elevernas prestationer som otydliga då deras lösningar på uppgifterna 2, 7 och 8 varierade inom samma kritiska aspekt, övergångar mellan tiotal och hundratal. En anledning kunde vara att de inte fick någon möjlighet till reflektion under spelets gång (tiobasspelet) då de hamnade i grupper där övriga eleverna var något snabbare till ett abstrakt tänkande och inte ville använda stickor. Läraren var också tvungen att gå runt till flera som behövde hjälp med uppstarten av spelet, vilket inte gav så mycket tid över för att kontrollera att alla följde spelreglerna.

Skillnader i för- och eftertest i procent mellan klasserna

Tabell 1. Skillnad mellan för- och eftertest för hela klassen

	Klass A 18 elever			Klass B 12 elever			Klass C 20 elever		
	Förtest	Eftertest	skillnad	Förtest	Eftertest	skillnad	Förtest	Eftertest	skillnad
4. från utvidgad form/antal till kortform/enhet	94 %	94 %	0 %	92 %	58 %	– 34 % 4b*			
6. platsvärde, tiotal, värde-begreppet	78 %	94 %	16 %	50 %	67 %	17 %	85 %	85 %	0 %
7. övergång mellan talsorter	72 %	78 %	6 %	75 %	83 %	8 %	75 %	80 %	5 %
8. Platsvärde upp till 1000, (100 år 3)	67 %	78 %	11 %	17 %	58 %	41 %	55 %	85 %	30 %
4b* omvänt från kortform/enhet till utvidgad form/antal							85 %	90 %	5 %
2a. använda värdebegrepp för tiotalsövergång med ental, uppåt							90 %	95 %	5 %
2b. använda värdebegrepp för tiotalsövergång med tiotal, nedåt							70 %	90 %	20 %

I uppgift 4 fanns ingen skillnad mellan klass A och klass B i lösningsfrekvens på förtestet. Skillnaden för A var den samma på eftertestet. Det bestämdes då att testa hur eleverna löste uppgiften åt andra hållet 4b* i klass B. Det visade sig att procenttalet sjönk från 92 % till 58 %. Detta föranleder att misstänka att den utvidgade formen kan ha lärts in per automatik eller att begrepp som ental, tiotal osv. inte är befästa. I klass C var det från början 90 % som klarade uppgiften. Skillnaden mellan klasserna kan också bero på åldersskillnaden.

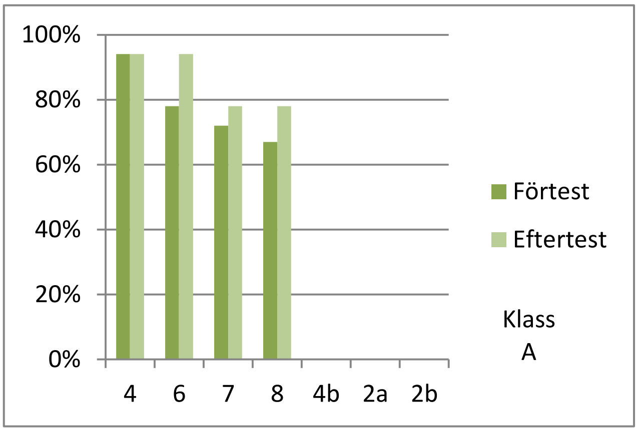
Uppgift 6 behandlar värdet av 1 och 7 i talet 17. Denna uppgift är grundläggande för begreppet platsvärde. För klass A och C låg lösningsfrekvensen på 78 % respektive 85 % till skillnad från klass B där endast 50 % klarade förtestet (årskurs 3). Resultatet höjdes till 67 % på eftertestet. Klass A hade en höjning på 16 %. Resultaten kan peka på att begreppet *platsvärde* är en kritisk aspekt. Klass C hade ingen förändring. Resultatet i klassen låg här på 85 %. De återstående 15 procenten utgjordes av de tre lågpresterande eleverna.

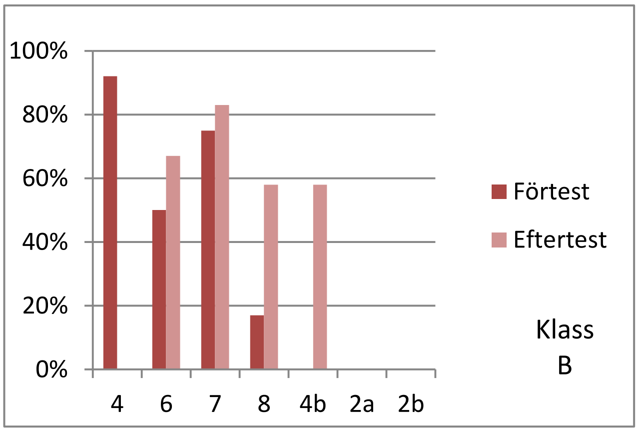
Uppgift 7 hade i alla tre klasserna mellan 72-75% på förtestet och höjningen var endast 6, 8, 5 %. Ett antagande kan vara att de som inte klarat de grundläggande övningarna som framförallt uppgift 6 har svårt att få syn på denna aspekt då det krävs säkerhet att hantera platsvärdet.

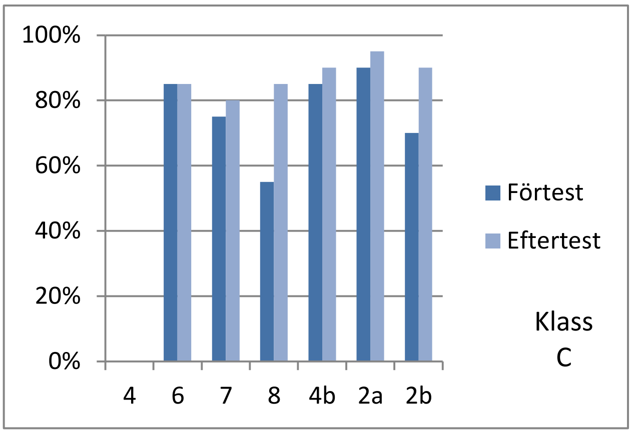
Den svåraste uppgiften på förtestet utgjorde uppgift 8. Här handlar det om platsvärde och talsorter som enhet med högre tal än tio. I klass A löste 67 % uppgiften på förtestet. Klass B låg på 17 % och klass C på 55 %. Här fanns en markant skillnad mellan för- och eftertest i klass B 41 % och klass C 30 %. Klass A ökade med 11 %. I samtliga klasser lades stor vikt vid talsorter som enhet/antal under lektionerna vilket kan betraktas som en kritisk aspekt. I samtliga tre klasser användes också talsortstabellen på liknade sätt vilket gav eleverna möjlighet att urskilja talsorterna.

Uppgift 2a utgjorde ingen större svårighet för klass C. 90 % av eleverna kunde från början lägga till 4 ental till 439 och vid eftertestet var det 95 %. 2b däremot var svårare för en del elever då de skulle minska 709 med 2 tiotal. 70 % löste uppgiften vid förtestet och vid eftertestet var det 90 %. Höjningen kan tolkas som att lektionen öppnat upp för värden kring de kritiska aspekterna platsvärde, enhet/antal samt nollans betydelse. Genom tiobasspelet fick de också möjlighet att träna på växling nedåt.

Resultaten redovisas här i form av stapeldiagram







Den största skillnaden mellan resultaten på för- och eftertest finns i uppgift 8 hos framförallt klass B och klass C. Här har eleverna visat förståelse för talsorterna ental, tiotal, hundratal (årskurs 3) och tusental (årskurs 4) uttryckt i kortform och talsorternas placering från höger till vänster. I klass B såg man också en ökning i uppgift 6 på eftertestet som har en koppling med uppgift 8 då det handlar om platsvärdet i talet 17.

Skillnaden mellan förtest och eftertest i uppgift 4 visade en sänkning av förståelsen hos 1/3 av eleverna i klass B då uppgiften ändrades enligt följande;
Före, utvidgad form 600+70+4 ⟶ kortform 674 efter; 674 ⟶ 600+70+4
En möjlig anledning är att eleverna inte kunnat urskilja enhet och antal simultant.

Det är utifrån de tre klassernas resultat svårt att avgöra om det skett någon större utveckling från cykel A till cykel C då klasserna visade skiftande förkunskaper vilket påverkar resultaten. Samtidigt har skillnaden inom klasserna mellan förtest och eftertest visat på en ökning av förståelse på ett flertal uppgifter.

Dimensioner av variation

I tabellen nedan redogörs för vilka *dimensioner av variation* eller *värden* som blivit synliga under lektionen. För att förstå den kritiska aspekten platsvärdet, betraktas antal möjliga siffror inom varje talsort, övergångar mellan talsorter som värden vilka varieras under lektionen.

Tabell 3. Sammanfattning av lektioner utifrån dimensioner av variation

Aktivitet		**Innehåll**	**Dimensioner av variation**
Första lektionen	1. Diskussion om nollans betydelse 2. Genomgång av talsorter som enhet och antal, konkret och skriftligt 3. Eget arbete med tiotalsövergångar 4. Knyter ihop påsen genom en kort repetition av talsorter som enhet och antal, konkret och skriftligt	Positionssystemets delar	*Kritisk aspekt:* **Platsvärde** *Värde:* Övergångar mellan talsorter; 9009+1, 9009+10 1 siffra för varje enhet, 1-9 *Kritisk aspekt:* **Enhet och antal** *Värde:* tio, ett tiotal, tio tiotal, tio ental som man buntat ihop, grupp med tio, en bunt om tio enheter… utvidgad form; ex. 111 …(100+10+1) bunt/antal pinnar
Andra lektionen	1. Genomgång av platsvärde och enhet/antal 2. Gruppaktivitet med bollkastning samt protokoll för antal träffar 3. Gemensam sammanräkning som förs in under ental och tiotal	Positionssystemets delar	*Kritisk aspekt* **Platsvärde*;*** *Värden*; vart talen står…, värda olika mycket… var de står så säger vi att siffrorna är värda någonting, värd *Kritisk aspekt* **Enhet/antal** *Värden:* fem ental…, fem kronor, två tior…, tjugo. Uppdelning av tal (utvidgad form) Insättning i tabell av enheter 1 siffra för varje enhet, 1-9
Tredje lektionen	1. Decimalsystemets uppbyggnad		*Kritisk aspekt:* **Nollans betydelse***;* som ingenting och värdehöjare:

	2. Genomgång av talsorter som enhet och antal, konkret och skriftligt 3. Spel; ”Tiobas spelet” 4. Sammanfattar genom att låta elever visa hur de delar upp talsorterna och frågar vad de lärt.	Positionssystemets delar	*Värden*: Den är ju ingenting. ... använda den och göra tio. … den gör så att det blir tiotal, hundratal, tusental, tio kronor, siffra framför nollan = värde, noll ental, *Kritisk aspekt:* **Platsvärde** Värden: övergångar mellan talsorter, växlingar uppåt och nedåt *Kritisk aspekt* **Enhet och antal** *Värden:* ett tiotal med glasspinnar10 stycken glasspinnar, bunt med tio pinnar, Det ska va tie. … en bunt med tio pinnar. Ental, tiotal i kortform och utvidgad form Ex. 111 / (100+10+1) bunt/antal pinnar

De kritiska aspekterna under lektion1var platsvärde samt enhet/antal. Under lektionens första del framgick antalet möjliga siffror inom varje talsort. 1 + 9 hölls invariant för att sedan variera talsorterna, ett ental + nio ental, ett tiotal+ 9 tiotal osv. Dessa variationer visades också samtidigt som antal genom att skriva in den utvidgade formen ovanför enheterna i tabellen. Denna variation fortsatte under andra delen då eleverna tränade på övergångar mellan talsorterna. Här var talet 9009 medan addenden varierade mellan olika talsorter. Talet uttrycktes också i utvidgad form. Enhet och antal varierades utifrån tiotal som fick vara invariant med variation kring antal; tio stycken, enhet; ett tiotal osv.

Upplägget för lektion 2 hade platsvärde som kritisk aspekt. Här var värdet i fokus och själva begreppet värde kan ses som konstant. Variationen bestod i att uttrycka värdet på olika sätt, med ord samt även utifrån den kritiska aspekten enhet/antal, exempelvis värd fem ental, femkronor. Uppdelning av tal som enheter framställdes dels genom gemensamma aktiviteter på tavlan och dels av sammanräkning av ental, tiotal och hundratal från de egna protokollen. Begreppet enheter var här invariant medan talsorterna varierades.

Lektion 3 startade med nollan som kritisk aspekt där 0, 1, 9 får stå som invarianta. Kontrasterna mellan inget värde respektive värdehöjare synliggjordes. Variationen bestod i hur värdet framställdes i den gemensamma diskussionen, markering av uteblivna tiotal, användning och placering. Den kritiska aspekten platsvärde belystes där 1+9 fick stå som invariant (övergång mellan talsorter,) medan talsorterna varierades med både enhet och antal (ett ental + nio ental, ett tiotal+ 9 tiotal osv.). Enhet och antal belystes också genom att tiotalet som begrepp varierades, bunt med tio, ett tiotal…

Kritiska aspekter

De kritiska aspekter som framkommit i studien stämmer överens med de svårigheterna kring positionssystemet som beskrivits i tidigare forskning.

De delar som positionssystemet består av är *bassiffror, position* och *gruppering* (enhet/antal) . Bassiffrorna (0-9) tillhör den grundläggande delen som behöver förstås med säkerhet för att gå vidare till större tal. Nollans värde tillsammans med andra siffror är viktig kunskap (vad står 0 för i talet 300). Position innebär kunskap om platsvärde, i vilken ordning talsorterna kommer från höger till vänster (vilket värde har ex. 3 i talet 532). I grupperingen behövs förståelse för hur grupperingar står för grupper om tio som ska betraktas simultant som antal och enhet (ex. trettio stycken eller tre tiotal i talet 30). De tre delarna har synliggjorts under lektionerna på lite olika sätt som tabellen ovan visar. De kritiska aspekter som kunnat urskiljas är;

*Platsvärde
*Enhet/antal.
* Nollans betydelse

Jämförelse mellan lågpresterande elever och övriga klassen

Med hjälp av för- och eftertest, intervjuer och jämförelser mellan elevernas svar och/eller motiveringar till hur de löst uppgift 7 (bil.3) framkom inga specifika skillnader förutom att de elever som här betraktats som lågpresterande (eleverna benämns A1, A2, B1, B2, C1, C2, C3) inte hade visat förståelse för framförallt uppgift 6 (platsvärdet i ett tvåsiffrigt tal) samt uppgift 8. Detta gällde sammanlagt sju elever i de tre klasserna. På eftertestet var det två av de sju eleverna som visat förståelse. I uppgift 7 har en del elever liknande felsvar oavsett om de betraktas som lågpresterande eller inte, exempelvis 5099 km +1= 6000. Här framgick en osäkerhet kring övergångarna mellan talsorterna.

Intervjuer

I klass B gjordes 3 (varav två lågpresterande elever) intervjuer i direkt anknytning till eftertestet. Tanken var att få syn på elevernas tankar kring platsvärde, nollans betydelse, samt gruppering (antal/enhet). Eleverna benämns B1, B2 och B3. I klass A gjordes en intervju med elev A1 ca sex veckor efter eftertestet

I intervjuerna som gjorts i klass B framgick att elever B1 och B2 skiljde sig från B3 i resonemang då B3 kunde redogöra klart och koncist för vad ental, tiotal och hundratal står för. B1 var mycket vag i sina formuleringar och det verkade som hon endast har fragmentariska kunskaper. – Nollan är noll. Noll vad för något? Vet inte. B1 fick resultatet 301 när jag bad henne lägga till 1 till 309. Förmodligen fattas de grundläggande kunskaperna om bassiffrorna och hur dessa hanteras.

Elev B1 intervjuas. Här fanns stora oklarheter kring platsvärde, nollans betydelse och tiotalsövergångar. Eleven visste att nollan står efter övriga siffror; *man börjar med trean och sedan nollorna.* Hon verkade däremot inte kunna förklara begrepp som ental, tiotal och hundratal i talen 30 och 300; *Noll, vad för något? … vet inte.* Eleven fick svaret 301 då hon ombads att lägga till 1 till 309, vilket kan innebära att eleven behöver mer grundläggande förkunskaper för att förstå platsvärde och enhet/antal i positionssystemet.

Excerpt1
L: vad är det för skillnad på treorna i 3,30,300?
E. B1: treorna… nää
L: varför står nollorna där
E. B1: *Man börjar med trean och sedan nollorna*
L: Vad betyder den nollan?
E. B1: Den betyder att det är noll

L: *Noll vad för något*
E. B1: *Hm. vet inte*
L: Här har vi två stora tal. Kan du läsa dom också? (309, 399)
E. B1 Tre… mm… hundra nittionio
L: *Vad händer om vi lägger till ett här (pekar på talet 309) vad är talet då?*
E. B1: *Trehundraett*
L: Hur många siffror är det i hundra?
E. B1: *Tre*
L: Och i tio?
E. B1: Två
L: och entalen är
E. B1: ett … tre tre tre

B2 har kommit längre men uttryckte sig svävande och osäkert. Han har ändå kunnat ta till sig kunskaper och det var stor skillnad på resultatet mellan för- och eftertest. Av åtta uppgifter hade han klarat tre uppgifter, men eftertestet visade hela sex av åtta.

Elev B2. Eftertestet visade att elev B2 nu klarat uppgift 6 och 8 men inte uppgift 7. Här lyckades han lösa både 309+1 och 399+1 utan tveksamheter. En möjlighet till att eleven inte löst uppgift 7 kan bero på att enheten kilometer förvillat tolkningen. I intervjun visade eleven på en viss förståelse men hade lite svårt att uttrycka sig och kunde inte uttrycka nollornas värde med ord: *De e hundratal tror jag.* En svårighet för eleven verkar vara att verbalt uttrycka och förstå matematiska begrepp för en djupare förståelse.

Excerpt 2
L: Vad är det för *skillnad på treorna i talen 3, 30, 300*
E. B2: *Den har två nollor, den har en nolla och den har noll nollor*
L: Vad betyder nollorna då
E. B2 Hundra
L: I vilket tal?
E. B2: …
L: Om du tänker på var de står någonstans
E. B2: …
L: *Vad betyder egentligen den nollan och den nollan (pekar på första och andra nollan)*
E. B2: *De e hundratal tror jag*
L: Om du lägger till ett på dessa tal börja med det första *309+1*
E. B2: *Trehundratio*
L: Ja, vad händer med det talet om du lägger till ett; *399+1*
E. B2: *Fyrahundra.*

Elev B3 har klarat samtliga uppgifter på eftertestet och uppvisade kunskaper om en förståelse för enhet och antal, tiotalsövergångar och platsvärde. I intervjun pendlade eleven mellan att uttrycka enhet och antal på ett säkert sätt och kunde direkt se tiotalsövergångarna*: Ja tre har inga hundratal eller tiotal i sig, trettio har tre tiotal i sig och trehundra har tre hundratal i sig.* Eleven var också säker på att skifta mellan kortform och utvidgad form av ett tal; *3 30 300 = 333/ 399 = 300 90 9.* De kritiska aspekter som vi funnit (enhet och antal, platsvärde; tiotalsövergångar och nollans betydelse) verkade vara befästa hos denna elev.

Excerpt 3
L: Är det någon *skillnad på* de här talen? *3, 30,300*
E.B3: *Ja tre har inga hundratal eller tiotal i sig, trettio har tre tiotal i sig och trehundra har tre hundratal i sig.*
L: *vad blir det för tal om man skulle göra ett tal av det*
E.B3: *trehundratre*

L: Om du lägger till ett (309) Vad får du för tal då?
E.B3: trehundratio
L: Om du lägger till ett där (399) vad får du då?
E.B3: Tre… fyrahundra
L: *Kan du dela upp det här talet (399)*
E.B3: Hur menar du då? Jaha du menar ental och så
L: m…
E.B3: *300 90 9*

De lågpresterande eleverna i klass A skiljde sig från övriga klassen genom att de inte ännu hade förstått begreppet talets värde, men arbetet i den lilla gruppen öppnade ändå upp en väg för dessa elever då de började att självständigt lösa uppgifterna.

Elev A1 tyckte att det var svårt med tiotalsövergångar mellan talsorterna och hade inte ord för att förklara hur hon tänkte under den första lektionen. Hon fick några dagar senare ytterligare en genomgång med konkret material i form av glasspinnar. Efterintervjun gjordes sex veckor senare. Resultatet visade en *ökad förståelse för talsorterna* och eleven kunde direkt svara på frågorna utan tveksamhet.

Excerpt 4
L; Kan du säga vad skillnaden är mellan treorna i talen 3, 30 och 300
E: 300 har två nollor, 30 har en nolla och 3 har ingen.
L: Vad betyder nollorna då?
E: De betyder … *Pekar på nollan i tiotalet det här symboliserar tiotal, pekar på 3 här finns ingen nolla så det är en enkel trea typ… här pekar på nollorna i 300 här symboliserar de hundra, med trean blir det trehundra.*
Eleven kunde också göra en tiotals- och hundratalsövergång utan betänketid.
309+1 och 399+1, vilket utgjorde en svårighet på förtestet.

Utifrån syftets frågeställningar och de kritiska aspekter som har kunnat urskiljas i förhållande till positionssystemets uppbyggnad är tolkningen följande,
De svårigheter som upptäckts när det gäller elever i behov av stöd är grundläggande förståelse för bassiffrorna, begreppslig förståelse av platsvärde samt förståelse för tiotalet som grupp och enhet.

De skillnader som kunnat urskiljas är hur långt eleven kommit i sin förståelse för positionssystemet inom de tre delarna bassiffror, position och gruppering. Skillnaderna mellan normal- till högpresterande respektive lågpresterande i klass B tycks också ligga i hur väl eleven kunnat uttrycka sin förståelse verbalt utifrån intervjuerna. Eleverna C1, C2 och C3 har visat något varierande prestationer på för- och eftertest. Begreppslig förståelse kan utgöra en del av svårigheterna för dessa elever då de har ett annat modersmål, vilket kan hindra eleverna från att få en djupare förståelse.

Studiens slutsatser/huvudresultat

Syftet med studien var att försöka identifiera och utveckla kritiska delar av det matematiska innehållet i undervisningen som skulle kunna ge elever i behov av stöd möjlighet att förstå viktiga begrepp kring positionssystemets uppbyggnad som kunde bidra till djupare förståelse hos den lärande. De forskningsfrågor som uppkommit utifrån studiens syfte är:

1. Vilka svårigheter kring positionssystemets uppbyggnad kan man urskilja som kritiska aspekter/delar bland elever i behov av stöd?

2. Vilka variationer, likheter eller skillnader, i svårigheter kring positionssystemet kan finnas som kritiska aspekter i förhållande till övriga elevers förståelse.

De svårigheter man kunnat urskilja som kritiska aspekter bland elever i behov av stöd är förståelse för platsvärde, gruppering (enhet/antal) samt nollans betydelse. I ett fall framkommer svårigheter att hantera bassiffrorna vilket innebär att det för denna elev också utgör svårigheter kring de övriga kritiska aspekterna.

I fråga om likheter eller skillnader mellan elever i behov av stöd och övriga elever så framkom det att svårigheterna var likartade men skillnaden bestod i att elever i behov av stöd hade svårigheter med platsvärde kring tiotalsövergångar, vilket de flesta övriga eleverna hade visat förståelse för. Elever i behov av stöd hade också svårigheter kring flera kritiska aspekter, medan övriga elever visade svårigheter kring enstaka kritiska aspekter. En variation som kunde urskiljas var hur långt eleven kommit i förståelsen av positionssystemet som helhet.

Diskussion

Metoddiskussion

Som metod har Learning Study visat sig vara ett användbart redskap för att analysera lektionsinnehåll, både för helklass men även för enskilda elever i behov av stöd då man kan penetrera lärandeobjektet på djupet.

I en studie som denna kan det finnas flera variabler att ta hänsyn till vid observationstillfällena som kan minska trovärdigheten. I och med att man rör sig i ett klassrum där det hela tiden händer olika saker som påverkar resultaten av både tester och förmåga att fokusera på lektionsinnehållet bör man även observera sådana fenomen. Dessa aspekter bör därför beaktas vid analysen.

Studien har vissa svagheter när det gäller utformandet av för- och eftertest. Med nyvunna kunskaper hade testet sett annorlunda ut och varit mer enhetligt för de tre klasserna. Först i efterhand lades uppgifter till för att få syn på flera aspekter. När läraren söker kritiska aspekter är det viktigt med bland annat noggrant utformade för- och eftertest (Lo, 2012). Intervjuer skulle ha gjorts med fler elever för att ge en större säkerhet av analysresultatet. Eftersom detta är min första erfarenhet av både variationsteorin och Learning Study finns en viss osäkerhet i användandet. Efter genomförd studie kan jag i efterhand se att hela upplägget kunde varit något annorlunda. Möjligheten till ett samarbete med kolleger vid analysen hade kanske också gett andra möjligheter i sökandet av kritiska aspekter.

Resultatdiskussion

Studiens slutsatser och huvudresultat diskuteras i relation till följande delar.

Svårigheter för elever i behov av stöd

De kritiska aspekter som kunnat urskiljas i studien har kretsat kring *platsvärde, gruppering (enhet/antal)* samt *nollans betydelse.* Sammanlagt åtta elever som kan betraktas som elever i behov av stöd i de tre klasserna visade svårigheter vid förtestet med att uttrycka värdet av siffrorna i ett tvåsiffrigt tal beroende på siffrans placering. Denna uppgift syns grundläggande för att förstå talsystemets uppbyggnad. Fyra av dessa elever klarade inte heller uppgiften på eftertestet. Då platsvärdet här behandlas som en kritisk aspekt utifrån min tolkning om att aspekten synliggjorts under lektionen och att elever visat förståelse i eftertestet blir det nödvändigt att söka andra förklaringar till varför de fyra eleverna inte kunnat urskilja de olika aspekterna. Elev A1 och B1 tycks inte ha de grundläggande kunskaper bassiffrorna, som behövs för att gå vidare med position och gruppering. Den första och kanske viktigaste delen av förståelsen för positionssystemet enligt Clements and Samara (2007) är hanterandet av bassiffrorna. Genom att sammanställa och dela upp tal utvecklas förmågan att upptäcka del-helhetsförhållanden.

Graden av förståelse varierar mellan elev A1 och B1. I A1:s fall kan det anas att den kritiska aspekten trots allt synliggjorts då eleven sex veckor senare i intervjun visade att hon fått förståelse för platsvärde och övergångar mellan talsorterna. När det gäller B1 finns det anledning att misstänka att bassiffrorna behöver befästas. Även om barn i allmänhet tidigt utvecklar taluppfattning enligt Gelmans och Gallisters (1978) fem principer om den matematiska utvecklingen, så varierar det åldersmässigt. Neuman (2013) skriver att i slutet av treårsåldern kan barn förstå räkneordens innebörd för att räkna efter hur många som finns, men för vissa barn kan det ta ytterligare fem till sex år innan de förstår så pass att de kan tillgodogöra sig undervisningen i skolan. I delen tidigare forskning framhålls flera möjligheter till olika processer i hanterandet av ental och tiotal som en kognitiv utveckling med stigande ålder. Oavsett om det handlar om den mentala tallinjen som logaritmisk (Dehane, 2003) eller parallell (Siegler och Booth 2004), eller utifrån forskning med jämförelser av tvåsiffriga tal som försiggår både separat och parallellt (Berch, 2005), så tyder det på att processen med tvåsiffriga tal kan bli svår att bemästra och utgör en belastning för arbetsminnet om eleven inte nått fram i sin utveckling.

Eleverna C1, C2 och C3 kunde inte identifiera värdet av ental och tiotal i uppgiften på eftertestet. Deras klasslärare var undrande över om det berodde på matematiska eller språkliga svårigheter då de tre har annat modersmål. Möjligtvis har två av dessa elever uppfattat någon kritisk aspekt då de lyckats med uppgift 2b i eftertestet som hanterar tiotalsövergångar baklänges.

Runesson (2005) föreslår ett antal frågor att ställa kring lärandeobjektet efter en lektion. Två av dessa frågor är: Vilka aspekter av lärandeobjektet var i fokus? Var dessa aspekter möjliga att urskilja? För de 3 elever som klarat uppgift 6 i eftertestet av de åtta som räknats som elever i behov av stöd kan de kritiska aspekternas värden ha öppnat upp för en förståelse av platsvärdet, vilket innebär att lärandeobjektet var i fokus och dess aspekter var möjliga att urskilja.

Skillnader i svårigheter

Testen i sig visar inga större skillnader mellan låg- och medel till högpresterande elevers svårigheter. Vad som tycks skilja mellan elevernas svårigheter är hur långt de kommit i sin utveckling av taluppfattning samt förståelsen för olika begrepp och hur eleven kan formulera förklaringar. Intervjun med elev B3 (s.34) ger ett visst stöd för att det handlar om full medveten förståelse då denna klarat samtliga uppgifter på eftertestet. Eleven uttrycker sig snabbt och säkert i sina svar. Fuson och Briars (1990) menar att för att kunna utföra beräkningar med olika talsorter behöver eleven förstå hur positionssystemet är uppbyggt och att det är nödvändigt att lära ut dessa begrepp till barn istället för att endast skapa procedurer utan förståelse för vårt talsystem.

Lärandeobjektet

Ett lärandeobjekt ska enligt Lo och Marton (2012) vara en odelad helhet och betonar att i inledningsskedet fokusera på skillnader istället för likheter tills eleven har kunnat urskilja de kritiska aspekterna av vad de skulle lära sig. Positionssystemet innehåller tre viktiga komponenter; *bassiffror, position* och *gruppering* (grupper om tio enheter) som här kan betraktas som det direkta lärandeobjektet. I studien fokuseras de två senare delarna och bassiffrorna har tagits för givna i för- och eftertest samt även delvis under lektionerna. Här har nollan som bassiffra separerats från de övriga siffrorna. Det *indirekta lärandeobjekt* refererar enligt Lo (2012) till förmågan som skall utvecklas hur den lärande ska behandla innehållet, vilket här handlar om hur de olika delarna i positionssystemet förhåller sig till varandra. Eftersom bassiffrorna lämnats utanför kan vissa kritiska aspekter ha utelämnats för en fullständig förståelse för vissa elever.

Dimensioner av variation

Tolkningen av de kritiska aspekterna har fokuserats utifrån
platsvärde, där dimensioner av variation visats som antal möjliga siffror inom varje talsort, övergångar mellan talsorter samt värdet av talsorten från höger till vänster värd fem ental, femkronor osv.
gruppering (enhet/antal)
antal; tal i utvidgad form, variation kring antal; tio stycken…
enhet; tal i kortform osv. ental, tiotal, hundratal…
nollans betydelse; som självstående siffra med värdet ingenting och värdehöjare tillsammans med andra siffror. Här fattas möjligen en förklaring av samtliga siffror i vårt decimalsystem 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 vilka står för antal och kan so Cady, Hopkins and Price (2014) uttrycker det, återanvändas för att representera tal i olika storlekar.

Lärares lärande

Det finns flera poänger med att använda sig av variationsteorin och Learning Study som ett verktyg. Dels fördjupas lärarens/speciallärarens egna kunskaper om ett lärandeobjekt och dels öppnas vägar för ett tydligare lärande för eleven då denna får möjlighet att betrakta ett objekt från olika håll. Pang och Marton (2003) uttrycker att läraren ska lära sig hantera lärandeobjektet, inte enbart det specifika objektet utan lärandeobjektet i allmänhet. Att betrakta lärande i detta perspektiv ökar möjligheterna till en djupare förståelse av vad som ska läras.

Som blivande speciallärare kan jag se många fördelar med att använda framför allt Variationsteorin som ett medel för att hitta nya sätt att hjälpa elever i behov av stöd. Modellen kan bli ett verktyg att hjälpa svagpresterande elever då den enligt Lo och Marton (2012) visat sig öka elevers lärande och minska klyftan mellan hög- och lågpresterande elevers lärande.

Förslag till fortsatt forskning

De kritiska aspekter som studien tar upp skulle kunna användas av andra för att själva utveckla en vidare fördjupning i förståelsen av positionssystemets uppbyggnad och finna flera aspekter att vidareutveckla. Möjligen kunde förståelse för begrepp såsom värde, platsvärde, talsort och enhet utgöra en sådan utveckling. Enligt Fuson och Briars (1990) behöver eleverna begreppsliga strukturer för orden och talen och kunna relatera dessa begreppsliga strukturer till varandra och till ord och tal.

Utifrån delen om tidigare forskning (s.9) finns ett samband mellan positionssystemets uppbyggnad och färdigheter inom addition och subtraktion. Cawley et.al. (2007) poängterar att eleverna måste få en uppfattning om vad som händer då man utför en addition med överföring eller subtraktion med växling. Här finns en möjlighet att söka kritiska aspekter kring sambandet för att synliggöra svårigheterna.

Specialpedagogiska konsekvenser och implikationer

Studiens syfte har varit att finna konkreta åtgärder för att hjälpa elever i behov av stöd att få förståelse för positionssystemet, vilket är grundläggande för en vidare förståelse av matematiken. Vad som framkom i studien var att elever och framförallt elever i behov av stöd behöver hjälp att finna en helhetsbild av positionssystemet, dess delar och hur dessa delar är relaterade till varandra. Med hjälp av de funna kritiska aspekterna kan pedagogen variera delarna med hjälp av variationer i form av olika representationer. Studien tar i första hand upp hanterandet av flersiffriga tal men en del elever kan behöva få en säkerhet i hur bassiffrorna 0-9 används. Positionssystemet som helhet bör betraktas utifrån samtliga delar:

Bassiffrorna 0-9 med nollan som kan stå för 0 som antal eller som värdehöjare i ett flersiffrigt tal, samt förståelse för hur vi hanterar bassiffrorna i ett tiobassystem genom att börja om från början med två siffror 10. (Jämför exempelvis tvåbas)

Begrepp som talsorter (tiotal, hundratal…) och platsvärde (siffrans värde beroende på placering i talet).

Tiotalets betydelse som både enhet och antal (att urskilja tiotalet som *grupp om tio* samt som *enheten ett tiotal)*

Tillsammans med kunskap om elevens förförståelse kan kritiska aspekter användas som ett verktyg för en vidare utveckling av elevens taluppfattning när det gäller exempelvis decimaltal och bråk samt övriga delar inom matematiken.

Referenser

Berch, D. B. (2005) Making sense of Number Sense: Implications for Children with Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities. Volume 38. July/august 2005* (4) s. 333-339. doi: 10.1177/00222194050380040901

Broadbent, A. (2004) Understanding Place-Value; A Case-Study of the Base Ten Game. *Australian Primary Mathematics Classroom*. Volume. 9. *No 4* p. 45-46.

Bryman. A. (2012). *Social Research Methods.* New York: Oxford University Press.

Cady, J. A., Hopkins. T. M., and Price. J., (2014). Impacting Early Childhood Teachers´ Understanding of the Complexities of Place Value. *Journal of Early Childhood Teacher Education.* (35) p. 79-97. DOI: 10.1080/10901027.2013.874382

Cawley, J. F., Parmar, R. S., Lucas-Fusco, L. M., Kilian, K. J., Foley, T. E. (2007). Place Value and Mathematics for Students with Mild Disabilities: Data and Suggested Practices. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal 5* (1) p. 21-39. http://hdl.handle.net/1773/23608

Chan, W. L., Au, W. T. K., Tang, J. (2014). Strategic Counting: A novel Assessment of Place-Value Understanding. *Learning and Instruction. 2014,*(29) p. 78-94.

Clements, D. H, and Sarama. J. Early Childhood Mathematics Learning. p. 461-557. Red. Frank K. Lester, Jr. (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning:* National Council of Teachers of Mathematics.

Dehaene, S. (2003). The neural basis of the Weber- Fechner law: a logarithmic mental number line:*Trends in Cognitive Sciences. Vol. 7.* No. 4. April 2003.

Fuson, K. C., Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second- grade place –value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*: *Vol. 21* No 3 180-206.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier A. I., Carpenter T. P and Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 28, *No. 2* p. 130-162 (Mar1997)

Gelman, R., Gallistel, C.R. (1978), (1986). *The Child´s Understanding of number.* Massachusetts: Harvard University Press.

Ho, C. S-H. and Cheng, F. S-F. (1997). Training in Place-Value Concepts Improves Children´s Addition Skills. *Contemporary Educational Psychology*, (*22*) p. 495-506.

Koellner, K., Colsman, M., Risley,R. (2011): *Teaching Exceptional Children, Vol. 44* (2) pp. 48-56.

Lo, M. L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of teaching and Learning* http://gupea.ub.gu.se/handle/2077/29645. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis

Lo. M. L and Marton. F. (2012). Towards a Science of the Art of Teaching. Using variationtheory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies.* Vol. 1 *No. 1* p. 7-22: http://dx.doi.org/10.1108/20468251211179678

Marton. F. (2005). Forskning av denna världen II – om teorins roll i praxisnära forskning. *Vetenskapsrådet.* s.105-122.Uppsala: Ord & form.

Marton. F., L.M.Ling. (2007). Learning from the Learning Study. *Journal of Research in Teacher Education. nr 1. s. 31-46*

McIntosh, A. och NCM. (2009). *Förstå och använda tal – en handbok.* Göteborg. Livréna.

Moeller, K., Pixner, S., Kaufmann. L., Nuerk. H-C. (2009). Children´s early mental number line: Logaritmic or Decomposed Linear?: *Journal of Experimental Child Psychology.* Vol. 103 p. 503-515.

Moeller, K., Pixner, S. Zuber, L., Kaufmann, L., Nuerk, H.-C. (2011). Early Place-Value Understanding as a Precursor for Later arithmetic performance - A longitudinell Study on Numerical Development: *Research in Developmental Disabilities*. (32). p. 1837-1851

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education, 18* (2) s. 3-46: ncm.gu.se

Neuman. D. (1987). The origin of arithmetic skills :A phenomenographic approach. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Pang. M. F, och Marton. F. (2003). Beyond ”lesson study”: Comparing two ways of facilitating the grasp of some economic concepts. *Instructional Scienc. Nr. 31*. s. 175-194.

Ross, Sharon H. (1989) Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *Arithmetic Teacher*, v.36 *Nr.6.* p.47-51.

Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation; a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of Education.*Vol. 35, *No. 1*. March 2005, pp. 69-87.

Skolverket. (2014). Svaga resultat i ny Pisa rapport. Hämtat från http://www.skolverket.se/omskolverket/press/pressmeddelanden/2014/svaga-resultat-i-ny-pisa-rapport-1.217275

Siegler, R. S., Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development.* Vol. 75. p. 428-444. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Verschaffel, L., Greer. B, DeCorte. E. Whole number concepts and Operations. p. 557-628. Red. Frank K. Lester, Jr. (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning:* National council of teachers of mathematics.

Vetenskapsrådet. Etik. Hämtad från http://codex.vr.se/texts/HSFR.pdf (2015-03-04)

Bilagor

För- och eftertest Bilaga.1

1. Vilket tal kommer närmast före 700?

2. Gör två tal mellan 50 och 100 med hjälp av siffrorna 7,3,8,4. Klass A och B

…………………………. ……………………………….

2) Skriv talet som är: Klass C

a) fyra ental större än 439……………………………..

b) två tiotal mindre än 709………………………………………

De högre talen gällde för klass A och C

3. Ungefär var ligger talet 75 (750) på tallinjen? Sätt ut en pil.

50 (500) 100 (1000)

Förklara hur du tänkte……………………..

4. 600+70+4 Vilket är talet?…………………………………………………. Klass A, B. Klass C (förtest)

*4) Skriv talet sexhundrasjuttiofyra Klass B (eftertest)

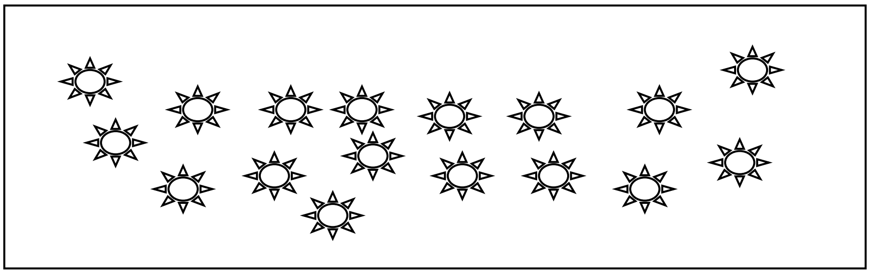
Klass C för- och eftertest

a) med siffror……………………………………………………

b) uppdelat i ental tiotal och hundratal……………………………….

5. Vad får du för tal om du gör talet **2**
a)T*io gånger större?*
b)*Hundra gånger större?*
………………………………… ………………………………………

6. Vilket värde har 7 i talet 17?...
Vilket värde har 1 i talet 17?...



……

7. En bil har kört 5099 km. Hur långt har den kört om den körs 1 km till?
………………………………………………………………………………………………
Förklara hur du tänkte:…………………....................................... (bil. 3)

……
8.

	tusental	hundratal	tiotal	ental
A				
B				
C				

Placera in talen så siffrorna kommer i rätt ruta
A. 33 B. 303 C. 3033

Klass B hade insättningar 3, 33 303 beroende på åldersskillnaden

Intervjuer klass B

Elev B2
3, 30 300
h: jag har tre tal här. kan du läsa dem för mig
f: trehundra trettio och tre
h. vad tänker du på när du ser de här talen?
F: eh.. trehundratrettiotre
h: mm.. hur då menar du
F: de e ju tre hundra å så lägger man på de trean där och de trean där
H: vad är det för skillnad på treorna i talet
F: den har två nollor, den har en nolla och den har noll nollor
H.vad betyder nollorna då
F: hundra
H: var? I båda talen?
F: ……
H: om du tänker på var de står någonstans
F: ……..
H: vad betyder egentligen den nollan och den nollan
F: de e hundratal tror jag
H: mm….
Om du lägger till ett på dessa tal börja med det första 309+1
F: trehundratio
H: ja, vad händer med det talet om du lägger till ett
F: fyrahundra
H: kan du se någon skillnad
F: det blir mycket större
H: m…
kan du dela upp talet i delar
F: …. nej
H: vi tittar här så såg du genast att det stod 333, men baklänges var svårare
F: mm…

Elev B1
L: kan du läsa vad det står här
B1: trehundra ..trettiotre
L: m… vad tänker du på när du ser de här talen
B1. att det är treor och nollor och sånt
L: att dom inte ser riktigt likadana ut
B1: Ja
L: vad är det för skillnad på treorna där
B1: treorna… nää
L: varför står nollorna där
B1: Man börjar med trean och sedan nollorna vad betyder den nollan?
B1: den betyder att det är noll
L: noll vad för något
B1: Hm.. vet inte
L: här har vi två stora tal. Kan du läsa dom också? (309, 399)
B1: tre…..mm..hundra nittionio
L: vad händer om vi lägger till ett här vad är talet då
B1: trehundraett
L:Kan du läsa detta talet?
B1: trehundranittionio
L: vad händer om man lägger till ett här
B1: paus… trenittio ett nej trehundraett
L: vad tänker du på när jag säger hundra
B1: mm tvekar, nä jag vet inte
L: Hur många siffror är det i hundra

B1: tre
L: och i tio
B1: två
L: och entalen är
B1: ett … tre tre tre
L: ja här är det tre. Kan du dela upp talet i delar, förstår du vad jag menar?
B1: nää…
L: visar på 300 30 3 vad händer om man lägger ihop dessa tal vad blir det
B1: då blir det nåt annat tal trehundratrettio och... tre
L: mm.
L: det här talet är inte uppdelat som det andra. Hur ska man göra för att dela upp det
B1: jag vet inte
H: ok

Elev B3
L: Kan du läsa vad som står där
C: m… trehundratrettitre
L: vad tänker du när du ser de här talen
C: jag tänker på siffror
L: kan man jämföra dem på något sätt
C: menar du om dom är lika?
L: är det någon skillnad på de här talen?
C: ja tre har inga hundratal eller tiotal i sig. trettio har tretiotal i sig och trehundra har tre hundratal i sig
L: vad blir det för tal om man skulle göra *ett* tal av det?
C: trehundratrettiotre
L: kan du läsa de här talen
trehundranio och trehundranittionio
L: om du lägger till ett. Vad får du för tal då?
C: trehundratio
L: Om du lägger till ett där vad får du då?
C: treh…fyrahundra
L: kan du dela upp det här talet
C: hur menar du då? jaha du menar ental och så
L: m..
C: 300 90 9

Klass A ca 6 veckor senare
-Kan du läsa de här talen för mig? 300 30 3
Läser talen trehundratrettiotre
-Vad tänker du på när du ser de här talen?
-Att det är hundratalen, det är tiotalen och det är entalen
-Mm…Vad är skillnaden mellan treorna i talen?
-300 har två nollor, 30 har en nolla och 3 har ingen
-Vad betyder nollorna då?
- De betyder ….*Pekar på nollan i tiotalet* det här symboliserar tiotal, *pekar på 3* här finns ingen nolla så det är en enkel trea typ… här *pekar på nollorna i 300* här symboliserar de hundra, med trean blir det trehundra
- Om du har 309 och lägger till 1 vad får du då? *Testfråga 7 gällde att lägga till 1 till 5099 och elev svarade 6000*
Utan betänketid - 310
- Om du lägger till 1 till 399? *Utan betänketid* 400

Bilaga 3

Hur tänkte eleverna?
Grönmarkerat indikerar felsvar eller inte helt korrekt. Svar markerat med * är de lågpresterande elevernas svar.

Tabell 1	
En bil har kört 5099 km. Hur långt har den kört om den körs 1 km till, **A**	**C** 5099 En bil har kört 5099 km. Hur långt har den kört om den körs 1 km till
En km till 5099+1 5099+1 5099+1 ? - Ett mer 1km+5099 *5099+1 Hoppa1 5099+1 5099+1 99+1 å sen 5000 99+1=100 5099+1 *inget svar - 6099, tusen km +5099=6099 - 6000 en km till - 5099+1=6000 - *5099+1=6000 -	*jag tänkte plus 6018 – *5100 jag tänkte plus *6000 +1 10 – 5099+1 så tänkte jag 5099+1=5100 Jag tog plus 1 så blev det 5100 6000 jag tänkte addition plus en – Jag tänkte 5099+1=5100 Jag tänkte 5099+1 5099+1=5100 5099+1=5100 5099+106000 – 5099+1=5100 Addition 5099+1=5100 5099+1=5100
B 109 km+1	
*218. 100+100=200 och 9+9=18 – *510 510 att man tar +1 5109 - Jag tänkte 1km 509+1=110 509+1 2 km tror jag 1+1=2 - 110 jag tänkte plus 1 km 110 och så la jag till en och då blir det 110 109+1 =110 109+1km=110 … så kör den en km till alltså 110 Jag tänkte plus	5100. jag tänkte 99+1 5100. jag tänker att eftersom det står 5099 så står det ju 99 0ch sen en till så e de 100 Inget svar 6099 Jag plussade 5000+1000 sen la jag till 99 5099+1= 5100 så tänkte jag 5099+1=5100 5100 man lägger bara till 1 km